

Объяснение спектральной классификации.

Бычков К.В.

11 декабря 2002 г.

Слои звёзд, в которых образуются абсорбционные линии, как правило, близки к состоянию термодинамического равновесия. Во всяком случае это относится к линиям, по которым проводится спектральная классификация. Поэтому термодинамические методы активно применяются при анализе звёздных атмосфер.

Конечно, полная задача об эквивалентной ширине спектральных линий не сводится только к термодинамике. При её решении необходимо учитывать также перенос излучения, профиль коэффициента поглощения, движение газа, вращение звезды и другие процессы. Но существует обстоятельство, позволяющее упростить полную задачу, сохраняя её физическое содержание. Дело в том, что эквивалентная ширина связана с числом поглощающих атомов, причём при заданных значениях атомных параметров эта связь однозначна и монотонна. Поэтому решение вопроса о населённости нижнего уровня перехода позволяет понять некоторые качественные аспекты спектральной классификации. Напомним, что при переходе к более горячим атмосферам определённые линии сначала усиливаются, затем проходят через максимум, а потом начинают ослабляться. Каждая линия имеет свою температуру максимума. Поставим следующие вопросы:

1. Почему линии быстро ослабляются при переходе от максимума к более низким температурам?
2. Почему ослабление в сторону высоких температур происходит значительно медленнее?
3. Как связана температура максимума со структурой атома?

Ответы на них мы можем получить, не выходя за рамки термодинамики.

1 Формулы Саха и Больцмана.

Этих двух формул вполне достаточно для первого знакомства с термодинамикой звёздных атмосфер. Формула Больцмана описывает населённость возбуждённых состояний, а формула Саха — состояние ионизации химического элемента. Первая выведена в предположении постоянства числа частиц, а вторая учитывает химические реакции, то есть возможное исчезновение старых частиц и появление новых.

1.1 Формула Больцмана и статистический вес.

Формула Больцмана связывает друг с другом населённости дискретных уровней иона или атома:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(\frac{E_1 - E_2}{kT}\right). \quad (1.1.1)$$

Здесь n_j обозначает число атомов на j -м энергетическом уровне, E_j — его энергию, g_j — статистический вес. Количество атомов рассчитываем на единицу объёма, то есть, n — плотность числа частиц.

Статистическим весом называют число *различных* состояний атома, имеющих *одну и ту же энергию*. В случае атома водорода вес энергетического уровня с номером k равен

$$g_k = 2k^2. \quad (1.1.2)$$

В более сложных системах различают *термы* и *уровни*¹. Реально в каждом атоме существуют *уровни*. Вес уровня определяется его полным моментом J :

$$g_J = 2J + 1. \quad (1.1.3)$$

В отличие от уровня, терм — воображаемое понятие и представляет собой среднее положение нескольких близко расположенных уровней. Вес терма определяется суммарным спином электронов S и их суммарным орбитальным моментом L :

$$g_{LS} = (2S + 1)(2L + 1). \quad (1.1.4)$$

Вес терма равен сумме весов всех составляющих его уровней.

¹Их следует отличать от *энергетических уровней*

1.2 Формула Саха

Формула Саха описывает равновесное состояние ионизации:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2U_i}{U_a} \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3} e^{-P/kT}. \quad (1.2.1)$$

Как и в случае формулы Больцмана, число частиц пропорционально статистическому весу. Нас интересует полное число ионов или атомов, поэтому вместо веса отдельного энергетического уровня фигурирует сумма по состояниям:

$$U_a = g_0 + \sum_{ex} g_{ex} \exp(-E_{ex}/kT). \quad (1.2.2)$$

Здесь g_0 — вес основного состояния, а индексом «ex» помечены веса и энергии возбуждённых состояний, по которым выполняется суммирование. Аналогично вычисляется сумма по состояниям иона U_i . Множитель 2 равен статистическому весу электрона — числу возможных проекций его спина.

В приложении к звёздным атмосферам температуру удобно измерять в электрон-вольтах:

$$T_{\text{eV}} = \frac{T}{11605 \text{ К}}.$$

Подставляя в (1.2.1) численные значения атомных констант, приходим к формуле

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = B \frac{U_i}{U_a} T_{\text{eV}}^{3/2} e^{-P/T_{\text{eV}}} \quad B \approx 6 \cdot 10^{21}. \quad (1.2.3)$$

Начиная с этого места условимся, что если температура измеряется в любых энергетических единицах, но не в градусах, то в этих же единицах выражены все потенциалы — ионизации и возбуждения.

Теперь обсудим важное отличие формулы Саха от формулы Больцмана. Если (1.2.1) переписать в виде

$$\frac{n_i}{n_a} = \frac{2U_i}{U_a} \frac{(2\pi mT)^{3/2}}{h^3 n_e} e^{-P/kT},$$

то мы увидим аналогию с (1.1.1), но в правой части присутствует дополнительный безразмерный множитель

$$g_{\text{tr}} = \frac{(2\pi m k T)^{3/2}}{h^3 n_e}.$$

Это не что иное, как число квантовых состояний электрона, связанное с его перемещением в пространстве. В формуле Больцмана такие множители сокращаются, так как при возбуждении число частиц остаётся прежним. А формула Саха описывает реакции с изменением числа частиц², поэтому множитель g_{tr} остаётся.

В условиях звёздных атмосфер численное значение g_{tr} лежит в диапазоне от 10^5 до 10^8 . Следовательно, заметная ионизация всех химических элементов имеет место при температурах, в несколько раз меньших потенциала ионизации атома. Например, в звёздах спектрального класса A0 водород ионизован более, чем наполовину, хотя температура их атмосфер в 12–15 раз меньше потенциала ионизации атома водорода.

1.3 Проблема суммы по состояниям.

Вернёмся к формуле (1.2.2) и рассмотрим внимательнее сумму

$$S = \sum_{\text{ex}} g_{\text{ex}} \exp(-E_{\text{ex}}/kT) \quad (1.3.1)$$

для атома водорода. На первый взгляд может показаться, что она невелика по сравнению с g_0 . Например, в уже упоминавшихся звёздах класса A0 численное значение $g_1 \exp(-E_1/kT)$ оставляет менее 0.1% от g_0 , а экспоненциальный множитель в следующих слагаемых ещё меньше. Однако энергия возбуждения имеет верхний предел — потенциал ионизации атома. Следовательно, для любого E_{ex} справедливо

$$\exp(-E_{\text{ex}}/kT) > \exp(-P/kT) .$$

Заменив в (1.3.1) энергии возбуждения на потенциал ионизации, получим очевидное неравенство:

$$S > \exp(-P/kT) \times 2 \sum_{j=1}^{\infty} j^2 .$$

Теперь стало совершенно ясно, что такая сумма не существует: она бесконечно велика!

Объясняется полученный парадокс просто: атом, взаимодействующий с другими частицами, имеет только ограниченное число уровней, а схема с бесконечным множеством состояний вблизи границы ионизации — это идеализация, справедливая только для уединённого атома. В

²Один атом превращается в пару ион-электрон

атмосферах звёзд обычно реализуется не более 20–30 уровней, и вклад суммы S редко превышает слагаемое g_0 . Не ставя своей целью выполнение рафинированных расчётов, мы примем простое решение, положив сумму по состояниям равной весу нижнего уровня:

$$U_a = g_0. \quad (1.3.2)$$

Аналогичная формула, конечно, справедлива и для иона.

Всё сказанное относится не только к атому водорода, но и к любой атомной системе, так как все состояния с высокой степенью возбуждения близки к состояниям атома водорода или водородоподобным ионам.

2 Линии гелия.

Самой простой системой является атом водорода, и вполне логично было бы начать изложение именно с его бальмеровской серии. Однако пойти по такому пути нам мешает принятая в предыдущем разделе гипотеза о его полной ионизации. Исследуя поведение субординатных линий в области высоких температур, мы должны рассмотреть конкуренцию ионизации и возбуждения. Но формула (2.1.1) не позволяет корректно учесть уравнение Саха для водорода. Поэтому мы начнём с гелия: изучение его субординатных переходов вполне допустимо в рамках сделанных предположений. К тому же для задач спектральной классификации, как мы убедились выше, гелий значительно интереснее водорода, так как его линии более чувствительны к температуре, а их интенсивность ближе к интенсивности линий других химических элементов³.

2.1 Электронная плотность.

В поставленной задаче населённость уровней зависит от двух параметров: температуры T и плотности числа тяжёлых частиц n . Под тяжёлыми частицами мы понимаем ионы и атомы, но не электроны. Строго говоря, для вычисления n мы должны просуммировать число частиц ионов и атомов всех химических элементов. Но если мы будем учитывать только водород, то сделаем ошибку лишь около десяти процентов, соответственно содержанию гелия — следующего по обилию химического элемента в звёздах главной последовательности. Далее, будем считать водород практически полностью ионизованным, что вполне допустимо для рассматриваемых нами звёзд горячее A0. Гелий в OB-звёздах может быть ионизован однократно, либо двукратно, то есть, его вклад в электронную плотность составляет от десяти до двадцати процентов. Пренебрегая этим вкладом, приходим к следующей простой формуле для вычисления электронной плотности:

$$n_e = n, \quad (2.1.1)$$

которой и будем пользоваться в дальнейшем.

2.2 Состояние ионизации гелия.

Гелий может находиться в трёх состояниях ионизации: HeI, HeII и HeIII, причём только HeI и HeII имеют дискретные уровни. Напомним,

³Линии водорода являются самыми сильными во всех звёздах горячее F0.

что HeI обозначает атом гелия, а HeII — его первый ион. Обозначим их относительные концентрации как x_1 , x_2 и x_3 . Из их определения следует

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \quad (2.2.1)$$

Формула Саха даёт два уравнения

$$\frac{x_2}{x_1} = f_1, \quad \frac{x_3}{x_2} = f_2. \quad (2.2.2)$$

Обе функции, f_1 и f_2 , содержат экспоненциальные множители:

$$f_j = a_j \exp(-P_j/kT). \quad (2.2.3)$$

Здесь a_j — тоже функции температуры ($\propto T^{3/2}$), но они меняются значительно медленнее, чем экспонента.

Хотя система линейных уравнений (2.2.1) и (2.2.2) решается без труда, тем не менее физическое содержание коэффициентов f_j позволяет выполнить дальнейшие упрощения.

Во-первых, в рассматриваемом диапазоне температур всегда выполнено условие:

$$f_2 < f_1. \quad (2.2.4)$$

Во-вторых, экспоненциальная зависимость f_j позволяет рассматривать сравнительно чётко очерченные диапазоны температуры, в каждом из которых можно пренебречь тем или иным состоянием ионизации. Выпишем решение (2.2.1) и (2.2.2) в явном виде:

$$\frac{1}{x_1} = 1 + f_1(1 + f_2), \quad (2.2.5)$$

$$\frac{1}{x_2} = 1 + \frac{1}{f_1} + f_2, \quad (2.2.6)$$

$$\frac{1}{x_3} = 1 + \frac{1}{f_2} \left(1 + \frac{1}{f_1} \right). \quad (2.2.7)$$

Отметим вытекающее из (2.2.2) полезное тождество:

$$\frac{x_3}{x_1} = f_1 f_2. \quad (2.2.8)$$

Теперь рассмотрим различные диапазоны изменения f_1 и f_2 .

1. $f_1 f_2 \ll 1$. В этом случае можно пренебречь x_3 по сравнению с x_1 и x_2 :

$$x_1 + x_2 \approx 1. \quad (2.2.9)$$

2. $f_1 f_2 \gg 1$. Здесь пренебрегаем x_1 по сравнению с x_2 и x_3 :

$$x_2 + x_3 \approx 1. \quad (2.2.10)$$

Каждое из уравнений (2.2.9) и (2.2.10) значительно проще, чем (2.2.1).

Теперь мы можем непосредственно заняться интересующей нас величиной — числом атомов n_l на нижнем уровне перехода. Напомним, что все наблюдаемые в оптическом диапазоне линии гелия относятся к субординатным, то есть, их нижний уровень является возбуждённым. Обозначим его энергию через E_l и введём безразмерную величину

$$y = \frac{n_l}{n_{\text{He}}}, \quad (2.2.11)$$

где n_{He} — полное число частиц гелия, просуммированное по всем состояниям ионизации. Рассмотрим сначала переходы нейтрального гелия.

2.3 Скорость убывания и возрастания линий HeI.

Чтобы воспользоваться формулами Саха и Больцмана, перепишем (2.2.11) для данного случая в виде

$$y = \frac{n_l}{n_{\text{HeI}}} \frac{n_{\text{HeI}}}{n_{\text{He}}}, \quad (2.3.1)$$

или

$$y = \frac{g_l}{g_1} \exp\left(-\frac{E_l}{kT}\right) x_1(T, n). \quad (2.3.2)$$

При переходе от (2.3.1) к (2.3.2) мы учли то обстоятельство, что населённость возбуждённых уровней значительно ниже, чем основного, и, следовательно, мы можем принять число атомов гелия в основном состоянии равным полному числу атомов гелия. Действительно, температура даже самых горячих O-звёзд не превышает 4 эВ, а потенциал возбуждения даже самых низких уровней нейтрального гелия выше 19 эВ. Поэтому равновесная населённость его возбуждённых уровней содержит экспоненциальный множитель $\exp(-19/4) < 0.01$. Но и такая оценка ещё завышена. Линии нейтрального гелия наиболее заметны у звёзд класса В, температура которых не превышает 2.5 эВ и тот же множитель меньше, чем $\exp(-19/2.5) < 0.001$.

Ясно, что исследование нейтрального гелия целесообразно проводить в области температур, которой отвечает уравнение (2.2.9). Подставляя

его решение в (2.3.2), получим

$$y = \frac{g_l}{g_1} \frac{\exp\left(-\frac{E_l}{kT}\right)}{1 + a_1(n, T) \exp\left(-\frac{P_1}{kT}\right)}. \quad (2.3.3)$$

Функция $y(T)$ не монотонна, она имеет максимум. Тем самым она отражает реальные свойства линий гелия, которые усиливаются при переходе от поздних к ранним подклассам В, а затем ослабляются у более горячих звёзд.

Рассмотрим область настолько низких температур, что в знаменателе (2.3.3) можно пренебречь вторым слагаемым по сравнению с единицей. Физически это означает, что гелий находится в нейтральном состоянии, и населённость $y(T)$ экспоненциально растёт с температурой по формуле Больцмана:

$$y \propto \exp(-E_l/kT). \quad (2.3.4)$$

Энергия возбуждения E_l оптических переходов атома гелия составляет 19–20 эВ. Температура атмосфер поздних и средних подклассов В лежит в диапазоне 1–1.5 эВ. Соответственно, показатель экспоненты (2.3.4) находится в диапазоне от 15 до 20, что означает очень быстрый рост населённости с температурой.

В противоположном случае высоких температур мы пренебрегаем единицей в знаменателе дроби (2.3.3) и приходим к:

$$y \approx \frac{1}{a(n, T)} \exp\left(\frac{P_1 - E_l}{kT}\right). \quad (2.3.5)$$

Оно описывает убывающую функцию температуры (напомним, что множитель $a(n, T)$ пропорционален $T^{3/2}$). Здесь мы видим результат влияния двух факторов. С одной стороны, увеличивается населённость возбуждённого уровня относительно основного состояния по формуле (1.1.1), но с другой — усиливается ионизация гелия. В рассматриваемом предельном случае концентрация атомов гелия x_1 зависит от температуры как

$$x_1 \approx \frac{1}{f_1} \sim \frac{1}{a(n, T)} \exp\left(\frac{P_1}{kT}\right) \quad (2.3.6)$$

в согласии с (2.2.5) при $f_1 \gg 1$. Ионизация нейтральных атомов здесь играет бóльшую роль, чем усиление возбуждения. Главная причина в том, что потенциал ионизации больше энергии возбуждения любого дискретного уровня.

Формула (2.3.5) описывает значительно более слабую зависимость населённости от температуры, чем (2.3.4). В самом деле, все возбуждённым уровни атома гелия близки к границе ионизации: при $P_1 = 24.6$ эВ значения E_l лежат в диапазоне от 19.5 до 21 эВ, поэтому разность $P_1 - E_l$ не превышает 4 эВ.

Итак, нам теперь известна причина поведения спектральных линий гелия в разных интервалах температур по обе стороны от максимума. Теперь определим положение максимума и его зависимость от параметров атома.

2.4 Температура максимума.

Определим температуру, отвечающую максимуму функции (2.3.3). Для удобства расчётов температуру в этом разделе измеряем в электронвольтах и введём новую переменную:

$$z = \frac{g_1}{g_l} \frac{1}{y}.$$

Будем искать минимум z как функции аргумента $\theta = 1/T_{\text{eV}}$. В силу монотонной зависимости как z от y , так и θ от T_{eV} , задача о минимуме $y(T_{\text{eV}})$ эквивалентна задаче о максимуме $z(\theta)$. Итак, ищем значение θ , при котором выражение

$$z = \exp(E_l \theta) \left[1 + A(n) \theta^{-3/2} \exp(-P_1 \theta) \right] \quad (2.4.1)$$

имеет минимум. Здесь мы выписали зависимость от температуры в явном виде и ввели множитель

$$A(n) = \frac{U_i B}{U_a n}.$$

Проинтервьюировав (2.4.1) по θ и приравняв производную нулю, приходим к уравнению

$$\exp(P_1 \theta) = A(n) \theta^{-3/2} \frac{\frac{3}{2} + (P_1 - E_l) \theta}{E_l \theta}. \quad (2.4.2)$$

Оно без труда решается численными методами, если задать конкретные значения параметров. Но наша задача заключается в другом: надо получить, хотя бы приближённо, аналитическую зависимость температуры максимума T_m от P_1 и E_l .

Произведение $P_1\theta$ является большой величиной: от десяти и выше. Это позволяет нам утверждать, что на величину T_m в гораздо большей степени влияет потенциал ионизации, чем энергия возбуждения. В справедливости сделанного утверждения убедимся сначала на модельном примере. Рассмотрим функцию

$$w = \exp(E_l\theta) [1 + B \exp(-P_1\theta)]$$

Она отличается от (2.4.1) тем, что зависящий от температуры множитель $A\theta^{-3/2}$ заменён некоторой константой C . Температура максимума w выражается аналитически:

$$T_m^w = \frac{P_1}{\ln \left[C \left(\frac{P_1}{E_l} - 1 \right) \right]}. \quad (2.4.3)$$

Мы видим, что T_m^w зависит от P_1 , в основном, линейно, а от E_l — только логарифмически. Можно надеяться, что (2.4.3) правильно передаёт и основные черты решения (2.4.2), так как множитель $\theta^{3/2}$ меняется значительно медленнее, чем $\exp(P_1\theta)$ и в первом приближении его можно заменить постоянной величиной.

Ниже мы выпишем аналитическое приближение к решению уравнения (2.4.2), но сначала поставим вопрос с физической точки зрения: почему энергия возбуждения столь слабо влияет на величину T_m ? Дело в том, что формула Больцмана, куда входит E_l , сама по себе не имеет экстремумов: чем выше температура, тем сильнее заселены возбуждённым уровни относительно основного. Появление максимума обусловлено переходом атомов в ионизованное состояние. Этот процесс описывается формулой Саха и им управляет потенциал ионизации.

Логарифмическая зависимость T_m от отношения P_1/E_l происходит от эффекта насыщения возбуждённого уровня. Состояния с меньшим потенциалом возбуждения заселяются при менее высоких значениях температуры и, следовательно, несколько раньше реагируют на изменение ионизации.

Теперь модифицируем формулу (2.4.3) таким образом, чтобы она описывала максимум функции (2.4.1). Конечно, точного решения мы не получим, но нашей целью, напомним, является получение аналитического выражения, качественно правильно описывающего зависимость T_m . Прологарифмируем уравнение (2.4.2):

$$P_1\theta = \ln A(n) - \frac{3}{2} \ln \theta + \ln \left[\frac{3}{2} + (P_1 - E_l)\theta \right] - \ln(E_l\theta).$$

Среди слагаемых правой части по величине выделяется первое. Действительно, численное значение θ около единицы, а сумма под знаком логарифма в третьем слагаемом и произведение $E_i\theta$ — порядка десяти. В то же время величина $A(n)$ в условиях звёздных атмосфер при плотности $n \approx 10^{15 \div 16}$ составляет $A(n) \approx 10^{5 \div 6}$. Отношение весов нижнего и верхнего уровней не превышает двойки: спин S не меняется, а орбитальное квантовое число L либо также остаётся прежним, либо меняется на единицу. Отношение g_i/g_a в случае гелия равно двум. Следовательно, мы не сделаем большой ошибки, пренебрегая в правой части всеми слагаемыми, кроме первого. В результате получим приближённую оценку:

$$\theta_0 \approx \frac{\ln A(n)}{P_1}.$$

С помощью θ_0 напишем выражение для константы C :

$$C = A(n)\theta_0^{-3/2}$$

и подставим его в (2.4.3). В результате получим

$$T_m = \frac{P_1}{\ln A(n) + \frac{3}{2} \ln P_1 - \frac{3}{2} \ln \ln A(n) + \ln \left(\frac{P_1}{E_i} - 1 \right)}. \quad (2.4.4)$$

Снова видна сильная зависимость от потенциала ионизации и слабая — от энергии возбуждения.

3 Бальмеровская серия атома водорода

По аналогии с задачей о гелии, исследуем вопрос о населённости n_2 второго уровня атома водорода — нижнего уровня всех переходов бальмеровской серии.

Как мы убедимся ниже, решения этих задач имеют сходные черты: немонотонная зависимость населённости возбуждённых уровней от температуры; наличие максимума, положение которого определяется, главным образом, потенциалом ионизации атома; медленное уменьшение от максимума к высоким температурам и быстрое падение в сторону холодных звёзд. Главной причиной такого поведения населённостей является сходство структуры энергетических уровней водорода и гелия:

- в оптический диапазон спектра обоих элементов попадают только субординатные переходы,
- все их возбуждённые состояния относительно близки к границе ионизации.

Тем не менее, для водорода требуются специальные расчёты, так как здесь неприменимо предположение (2.1.1) о независимости электронной плотности n_e от температуры. Водород является основным донором электронов в звёздах спектральных классов O, B и A. Поэтому в рассматриваемой задаче необходимо вычислять n_e одновременно с населённостью уровней.

3.1 Состояние ионизации водорода

Введём обозначения

$$x_i = \frac{n_p}{n}, \quad x_a = \frac{n_a}{n}, \quad (3.1.1)$$

соответственно, для относительной концентрации ионов и нейтральных атомов водорода. Здесь n_p — число протонов, а n_a — число нейтральных атомов водорода в единице объёма. Введём параметр n , в этом разделе он равен плотности водорода по числу частиц:

$$n = n_p + n_a. \quad (3.1.2)$$

Принятая нами величина примерно на 10% отличается от той, что приводится в справочниках, так как содержание водорода в звёздах главной

последовательности составляет около 90%. В проводимых здесь расчётах столь небольшим различием можно пренебречь.

Мы предполагаем, что все электроны происходят только за счёт ионизации водорода. Следовательно, их число равно числу протонов:

$$n_e = n_p. \quad (3.1.3)$$

Это предположение вносит в расчёты ошибку, заведомо меньшую 10%, так как гелий ионизован значительно слабее водорода.

Формула Саха с учётом (3.1.3) даёт квадратное уравнение для x_a :

$$\frac{(1 - x_a)^2}{x_a} = \frac{B}{2n} T_{\text{eV}}^{3/2} \exp\left(-\frac{P}{T_{\text{eV}}}\right). \quad (3.1.4)$$

Здесь учтено, что вес основного состояния атома водорода, согласно (1.1.2), равен двум:

$$g_a = 2, \quad (3.1.5)$$

а состояние иона не имеет вырождения:

$$g_i = 1. \quad (3.1.6)$$

Напомним, что величина B известна из (1.2.3).

3.2 Зависимость от плотности и от температуры

Полную плотность водорода n в наших расчётах будем считать постоянным параметром. В действительности плотность атмосферы разная у звёзд разных спектральных классов:

Sp	O5	B0	B5	A0	A5	F0	F5
$\lg n$	15.0	15.0	15.0	15.2	15.6	16.1	16.6

Как видно из таблицы, в диапазоне от B5 до F0 величина n меняется примерно в 40 раз. Тем не менее, мы будем пренебрегать вариациями плотности по сравнению с влиянием температуры на населённость уровней. В самом деле, при переходе от класса B5 к F0 температура атмосферы уменьшается примерно вдвое: от 15500 К до 7400 К. При этом экспоненты $\exp(-E_2/T_{\text{eV}})$ и $\exp(-P/T_{\text{eV}})$ падают, соответственно, в $4 \cdot 10^3$ и $7 \cdot 10^4$ раз. Поэтому для звёзд главной последовательности в первом приближении эффект плотности можно не рассматривать.

Для определённости параметр n примем равным плотности атмосферы звезды класса A0:

$$\lg n = 15.2. \quad (3.2.1)$$

Именно у этого класса звёзд главной последовательности наиболее сильна серия Бальмера.

3.3 Населённость второго уровня

Преобразуем уравнение (3.1.4) к виду

$$\frac{(1 - x_a)^2}{x_a} = f, \quad (3.3.1)$$

где

$$f = a \cdot \exp(-P/T_{\text{eV}}), \quad (3.3.2a)$$

$$a = C \cdot T_{\text{eV}}^{3/2}, \quad (3.3.2b)$$

$$C = B/(2n). \quad (3.3.2c)$$

Одно уравнение (3.3.1) заменяет целую систему уравнений задачи о гелии (2.2.1), (2.2.2), но оно является нелинейным. Так проявляется зависимость электронной плотности от температуры.

Введём безразмерную величину

$$y = \frac{1}{4} \frac{n_2}{n}, \quad (3.3.3)$$

характеризующую населённость второго уровня атома водорода. Множитель $1/4$ в правой части введён для удобства последующего использования формулы Больцмана. Он равен отношению статистических весов g_1/g_2 . Далее, воспользовавшись формулами Больцмана (1.1.1) и Саха (3.3.1), выражаем y как функцию температуры и плотности:

$$y = \exp\left(-\frac{E_2}{T_{\text{eV}}}\right) \cdot x_a(T_{\text{eV}}, n), \quad (3.3.4)$$

в которой $x_a(T_{\text{eV}}, n)$ является решением уравнения (3.3.1)

3.4 Высокие и низкие температуры

Снова, как и в случае гелия, убеждаемся, что функция $x_a(T)$ не монотонна. В области высоких температур, когда правая часть (3.3.1) мала, то есть выполнено условие

$$f \gg 1, \quad (3.4.1)$$

для относительной концентрации нейтрального водорода справедлива простая формула:

$$x_a \approx \frac{1}{f}, \quad (3.4.2)$$

откуда следует

$$y = \frac{2n}{B} T_{\text{eV}}^{-3/2} \exp\left(\frac{P - E_2}{T_{\text{eV}}}\right). \quad (3.4.3)$$

Мы получили сравнительно медленное уменьшение населённости второго уровня с ростом температуры. Как и в случае гелия, это обусловлено близостью возбуждённого состояния к границе ионизации.

В области предельно низких температур ($f \ll 1$) ионизационное равновесие сдвинуто в сторону атомов:

$$x_a \approx 1. \quad (3.4.4)$$

В этом случае из (3.3.4) следует

$$y \approx \exp\left(-\frac{10.2}{T_{\text{eV}}}\right). \quad (3.4.5)$$

Здесь относительно большая величина потенциала возбуждения приводит к экспоненциально быстрому падению населённости второго уровня по мере уменьшения температуры.

Итак, функция $y(T)$ возрастает при переходе к самым холодным звёздам и убывает в области предельно высоких температур. Следовательно, она имеет максимум. Перейдём к определению температуры максимума.

3.5 Температура максимума населённости

Выполним замены переменных, которые нам несколько упростят вычисления. Максимум функции $y(T)$ приходится на ту же температуру, что и минимум обратной ей величины

$$z = \frac{1}{y} \quad (3.5.1)$$

как функции обратной температуры

$$\theta = \frac{1}{T_{\text{eV}}}. \quad (3.5.2)$$

Эквивалентность обеих задач вытекает из монотонности функций (3.4.5) и (3.5.2). Итак, (3.3.4) преобразуется в

$$z = \frac{\exp(E_2 \theta)}{x_a(\theta, n)}. \quad (3.5.3)$$

Минимум функции $z(\theta)$ ищем в области небольших значений x_a . А именно, будем считать, что можно пренебречь квадратом концентрации:

$$x_a^2 \ll 1. \quad (3.5.4)$$

В этом случае левая часть (3.3.1) становится линейной:

$$(1 - x_a)^2 \approx 1 - 2x_a. \quad (3.5.5)$$

Подставим (3.5.4) в (3.3.1) и решим полученное линейное уравнение относительно x_a :

$$x_a \approx \frac{1}{2 + f}. \quad (3.5.6)$$

Ясно, что последняя формула справедлива только при выполнении условия (3.4.1). В этой области рассмотрим функцию

$$w(\theta) = \exp(E_2 \theta)(2 + f). \quad (3.5.7)$$

Оно получается из (3.5.3), если заменить точное значение x_a на его приближение (3.5.6). Мы исследуем на минимум функцию (3.5.7), а затем проверим выполнение условия (3.5.4).

Сочетание экспоненциального и степенного множителей в выражениях для f в (3.3.2) приводит к тому, что уравнение

$$\frac{dw}{d\theta} = 0, \quad (3.5.8)$$

выражающее требование минимума $w(\theta)$, не имеет аналитического решения. Для дальнейших упрощений воспользуемся известным из наблюдений фактом, что в звездах класса A0, где наиболее сильны линии бальмеровской серии, температура атмосферы значительно, в 10–15 раз меньше потенциалов ионизации и возбуждения водорода. Как мы уже писали в разделе (3.2), экспоненциальные множители при таких значениях аргумента очень сильно меняются с температурой. Их относительные изменения велики по сравнению с изменением множителя $T_{\text{eV}}^{3/2}$. Следовательно, в первом приближении температуру в степенном множителе можно положить равной некоторой величине

$$T_{\text{eV}} = T_0, \quad (3.5.9)$$

которую можно подобрать, исходя из особенностей задачи. В данном случае разумно принять для T_0 значение, близкое к температуре звезды класса A0:

$$T_0 = 1 \text{ eV}. \quad (3.5.10)$$

С учётом сказанного продифференцируем функцию $w(\theta)$, удерживая только быстро меняющиеся слагаемые:

$$\frac{dw}{d\theta} = \exp(E_2\theta) \cdot [E_2(2 + f) - aP \exp(-P\theta)]. \quad (3.5.11)$$

и приравняем нулю производную $dw/d\theta$. В результате получим алгебраическое уравнение, решением которого является температура

$$T_{\max} = \frac{P}{\ln [0.85 \cdot 10^6 \cdot T_0^{3/2} (P/E_2 - 1)]}. \quad (3.5.12)$$

Подставляя сюда параметры атома водорода:

$$\frac{P}{E_2} = 4/3,$$

с учётом (3.5.10) получим

$$T_{\max} = 1.07 \text{ eV} \quad (3.5.13)$$

в хорошем согласии с наблюдениями.

Теперь проверим выполнимость условия (3.5.4). Подставив (3.5.13) в (3.3.2а), получим

$$f(T_{\max}) = 6.35.$$

Соответствующее решение квадратного уравнения (3.3.1) получается равным

$$x_a(T_{\max}) = 0.12.$$

Таким образом, величина x_a^2 действительно даёт малый вклад в числитель левой части (3.3.1) и приближение (3.5.6) вполне оправдано.

Температура максимума населённости n_2 , как следует из (3.5.12), определяется, главным образом, потенциалом ионизации

$$T_{\max} \propto P,$$

в то время как от потенциала возбуждения она зависит только логарифмически. Причина этого рассмотрена в разделе 2.4 предыдущей главы.