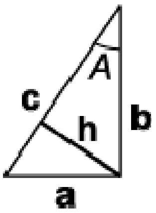
Глава 1. Анализ размерностей.

Анализ размерностей представляет собой общий метод, позволяющий с точностью до безразмерной константы получить выражение для нужной физической величины, размерность которой нам известна. Для этого выбираются «базовые» величины, ни одна из которых не может быть выражена через остальные. Их комбинация и даст интересующий результат. Анализ размерностей приводит к оценке по порядку величины, причём иногда получаются точные аналитические выражения.

В качестве примера приведём доказательство теоремы Пифагора. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами **a** и **b** и гипотенузой **c**:



Острый угол напротив стороны **a** обозначим A. Из соображений размерности площадь треугольника S пропорциональна квадрату одной из сторон, скажем, гипотенузы:

$$S = f(A) \cdot c^2.$$

Высота **h**, опущенная из прямого угла на гипотенузу, разбивает треугольник на два ему подобных, причём их гипотенузы равны **a** и **b** соответственно. Острый угол каждого из этих треугольников равен A, поэтому их площади могут быть выражены как

$$S_1 = f(A) \cdot a^2$$
$$S_2 = f(A) \cdot b^2 .$$

Подставляя эти формулы в очевидное равенство

$$S_1 + S_2 = S$$

и сокращая на общий множитель $f(A)$, приходим к искомой теореме:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Перейдём к физическим приложениям.

1.1. Классическая электродинамика.

В предлагаемом курсе мы будем пользоваться, главным образом, симметричной, или гауссовой системой единиц. В ней электрические величины измеряются в единицах СГСЭ, а магнитные — в единицах СГСМ. Лишь в отдельных случаях мы будем употреблять систему СИ, специально это оговорив, а там, где это уместно — и внесистемные единицы, такие как электрон–вольт (эВ) или ридберг (Ry). Применяемые значения констант взяты из статьи “The Fundamental Physical Constants”, опубликованной на странице 9 журнала “Physics Today” Volume 49, Number 8, Part 2, авторы — E. Richard Cohen и Barry N. Taylor.

Итак, массу мы измеряем в граммах (г), размеры — в сантиметрах (см) и время — в секундах (с). В качестве базовых величин возьмем элементарный электрический заряд e, массу электрона m_e и скорость света c:

$$
\begin{array}{llll}
 & e & = 4.80325\cdot 10^{-10} & \approx 4.8\cdot 10^{-10} & \text{г}^{1/2}\text{см}^{3/2}\text{с}^{-1} \\
(1.1) & m_e & = 9.10956\cdot 10^{-28} & \approx 9.1\cdot 10^{-28} & \text{г} \\
 & c & = 2.997925\cdot 10^{10} & \approx 3\cdot 10^{10} & \text{см}\cdot\text{с}^{-1}
\end{array}
$$

Это — экспериментальные величины, не определяемые теоретически.

Классический радиус электрона.

Сформируем имеющую размерность длины комбинацию для релятивистской, но не квантовой величины: в ней должна присутствовать скорость света, но нет постоянной Планка. Для этого составим уравнение вида

$$e^x m_e^y c^z = l.$$

Для размерностей это выглядит так:

$$\left(\text{г}^{1/2}\cdot\text{см}^{3/2}\cdot\text{с}^{-1}\right)^x\cdot\text{г}^y\cdot\left(\frac{\text{см}}{\text{с}}\right)^z = \text{см}.$$

Приравняв степени при одинаковых единицах размерности в левой и правой частях последней формулы, получим систему из трех линейных уравнений:

$$
\begin{array}{rlcl}
\text{г:} & \frac{1}{2}x + y & = & 0 \\
\text{см:} & \frac{3}{2}x + z & = & 1 \\
\text{с:} & -x - z & = & 0
\end{array} .
$$

Решение этой системы дает:

$x = 2,\quad y = -1,\quad z = -2.$

Таким образом, комбинация базовых величин (1.1) с размерностью длины имеет вид:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}.$$

Мы получили выражение для так называемого классического радиуса электрона r_e. Численно он равен

r_e=2.82·10^{-13} см.

Перепишем формулу для r_e в виде

$$m_e c^2 = \frac{e^2}{r_e}.$$

В правой части последнего уравнения стоит кулоновская энергия взаимодействия зарядов e, находящихся на расстоянии r_e, а в левой части — энергия покоящегося электрона. Таким образом, r_e представляет собой такой размер шарика с зарядом e, при котором энергия взаимодействия электрона с возбуждаемым им полем равна его энергии покоя $m_e c^2$.

В атомной физике энергию часто выражают в электронвольтах (эВ). Такую энергию приобретает электрон после прохождения разности потенциалов, равной одному вольту. Напомним, что вольт — это единица измерения разности потенциалов в системе СИ, она примерно в триста раз меньше соответствующей единицы гауссовой системы:

$$1\text{В} = \frac{1}{299.7925} \approx \frac{1}{300}\ \text{СГСЕ}.$$

Отсюда вытекает связь между электронвольтом и эргом — единицей энергии в системе Гаусса:

$$1\ \text{эВ} = 1.602192 \cdot 10^{-12}\ \text{эрг} \approx 1.6 \cdot 10^{-12}\ \text{эрг}.$$

Хотя для температуры принята своя единица измерения — градус Кельвина, тем не менее, и здесь иногда прибегают к электрон–вольтам. Чтобы выразить температуру в энергетических единицах, надо выполнить замену

$$T \to T/k,$$

где k — постоянная Больцмана,

$$k = 1.380658 \cdot 10^{-16} \approx 1.38 \cdot 10^{-16}\ \text{эрг/K}.$$

Отсюда легко вычислить температуру, соответствующую одному электронвольту:

$$1\text{эВ} = 11604.55\ \text{K}.$$

Выразим энергию покоя электрона в электронвольтах:

$$m_e c^2(\text{эВ}) = \frac{m_e c^2(\text{эрг})}{1.602192 \cdot 10^{-12}(\text{эрг/эВ})} = 0.511 \cdot 10^6\ \text{эВ} = 511\ \text{кэВ}.$$

Известна реакция образования электрон-позитронных пар — превращение гамма–кванта (γ) в электрон (e^-) и позитрон (e^+):

$$\gamma \to e^- + e^+.$$

Позитрон — это элементарная частица, масса которой равна массе электрона; заряды электрона и позитрона равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Говорят, что позитрон является античастицей по отношению к электрону. Пороговая энергия реакции определяется суммарной энергией покоя электрона и позитрона и составляет около одного мегаэлектронвольта. Имеет место и обратная реакция — аннигиляция электрона и позитрона:

$$e^+ + e^- \to \gamma + \gamma + \ldots$$

В этой реакции возникают два или три фотона.

Другая важная для атомной физики частица — протон относится к классу нуклонов. Нуклон — это обобщённое наименование протона и нейтрона, частиц, из которых состоит ядро атома. Протон значительно тяжелее электрона:

$$m_p = 1836.11 \cdot m_e = 1.672661 \cdot 10^{-24}\ \text{г}.$$

Энергия покоя протона $m_p c^2$ равна 938 МэВ. Нейтрон слегка тяжелее протона, его масса равна $1.6750 \cdot 10^{-24}$ г, а соответствующая ему энергия покоя составляет 940 МэВ. Аннигиляция нуклона и антинуклона чаще всего приводит к образованию π–мезонов.

Ленгмюровская частота.

Вещество во Вселенной находится, главным образом, в виде плазмы — полностью или частично ионизованного газа. В достаточно больших объёмах плазма электронейтральна, то есть, количество положительного и отрицательного зарядов в ней одинаково. Однако в небольших областях и на короткое время возникают флуктуации заряда. Электроны, стараясь их компенсировать, приходят в движение и получаются колебания вокруг положения равновесия. Эти колебания называются плазменными, или ленгмюровскими, по имени учёного, впервые обратившего на них внимание.

Помимо элементарного заряда и массы электрона, частота плазменных колебаний ω_0 зависит от концентрации электронов N_e — их числа в единице объёма. Комбинация e^2/m_e имеет размерность $см^3/ с^2$. Умножив её на N_e, получим с точностью до безразмерной константы:

$$\omega_0 \propto \sqrt{\frac{e^2 N_e}{m_e}} \ .$$

Точное выражение для ω_0 содержит множитель $(4\pi)^{1/2}$:

(1.2) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi e^2 N_e}{m_e}} = 5.64 \cdot 10^4 \sqrt{N_e(\text{см}^{-3})} \quad \text{с}^{-1}.$$

Излучение в плазме не может распространяться на частотах ниже ленгмюровской. В земной ионосфере электронная плотность может быть оценена как 10^6 $см^{-3}$. Соответственно, от неё отражаются радиоволны с линейной частотой $\nu < 9$ МГц.

1.2 Квантовая физика.

Переходим к оценкам, в которых присутствует постоянная Планка

$h = 6.62620 \cdot 10^{-27}$ эрг·с,

имеющая размерность действия. Это означает, что мы выходим за пределы применимости классической механики и вступаем в область квантовой теории. Во многих формулах удобно пользоваться модифицированной («перечёркнутой») постоянной Планка:

$\hbar = h/2\pi = 1.05459 \cdot 10^{-27}$ эрг·с.

В классической физике действие сохраняется как адиабатический инвариант. Например, медленное изменение длины математического маятника сопровождается изменением энергии и частоты его колебаний, так что остаётся постоянным их отношение:

$$\frac{E}{\omega} = \text{const}.$$

В квантовой физике этому соотношению отвечает формула,

(2.1) $$E = \hbar\omega,$$

связывающая энергию и частоту фотона. Длина волны λ излучения связана с импульсом фотона $\mathbf{p}$, если его рассматривать как частицу:

(2.1a) $$\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}.$$

Здесь $\mathbf{k}$ — волновой вектор. Он направлен по направлению движения волны, а его модуль равен $2\pi/\lambda$. Постоянная Планка h представляет собой элементарную порцию, или квант, действия. Действие квантуется: оно принимает дискретный ряд значений, пропорциональных h, и не может быть меньше h.

Размерность действия имеет также момент орбитального количества движения частицы, равного векторному произведению её количества движения на радиус-вектор:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rp}].$$

Момент вращения тоже квантуется. Кроме того, квантуется произведение дисперсий импульса и координаты

(2.2) $$\Delta p_x \cdot \Delta x \sim \hbar.$$

Последняя формула представляет собой известное соотношение неопределённостей Гайзенберга. Произведение дифференциалов трёх координат

$$dx \cdot dy \cdot dz$$

и трёх составляющих импульса

$$dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z$$

можно рассматривать как элемент объёма в 6–мерном фазовом пространстве. Каждая пара произведений импульса и координаты $\Delta p_i \cdot \Delta r_i$ имеет размерность действия. Соответственно, число квантовых состояний dN в элементе фазового объёма

$$d\Gamma = dpx \cdot dpy \cdot dpz \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

равно

(2.3) $$dN = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{dp_x \cdot dp_y \cdot dp_z \cdot dx \cdot dy \cdot dz}{h^3}.$$

Этим соотношением мы будем пользоваться неоднократно, например, при выводе формулы Планка для спектра чернотельного излучения, а также формулы ионизационного равновесия, носящей имя Сахá.

Скорость электрона в атоме

Масштабы величин в нерелятивистской квантовой теории определяют элементарный заряд e, масса электрона m_e и постоянная Планка $\hbar$:

$$\begin{aligned} [e] &= \text{г}^{1/2}\text{см}^{3/2} \cdot \text{с}^{-1}, \\ [m_e] &= \text{г}, \\ [\hbar] &= \text{г} \cdot \text{см}^2 \cdot \text{с}^{-1}. \end{aligned}$$

Комбинация с размерностью скорости получается из двух констант:

$$v_0 = \frac{e^2}{\hbar}.$$

Это скорость электрона на первой боровской орбите. Умножив числитель и знаменатель на скорость света c, перепишем выражение для v_0 в виде

$$v_0 = \alpha \cdot c = 2.18 \cdot 10^8 \text{ см/с}.$$

Безразмерная величина α называется постоянной тонкой структуры:

(2.4) $$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137.036} \approx \frac{1}{137}.$$

Она играет важную роль в релятивистской квантовой теории. Для построения квантовой электродинамики существенно, что α значительно меньше единицы и может рассматриваться как малый параметр.

Энергия атома

Зная величину V_0, оценим энергию электрона на первой боровской орбите. С точностью до константы

$$(2.5)\qquad E \sim m_e V_0^2 = m_e \frac{e^4}{\hbar^2} = 27.21165 \approx 27.2 \text{ эВ}$$

Это атомная единица энергии — хартри. Половина этой величины называется ридбергом:

$$\mathrm{Ry} = m_e \frac{e^4}{2\hbar^2} \approx 13.6 \text{ эВ}.$$

В дальнейшем мы увидим, что ридберг практически равен потенциалу ионизации атома водорода из основного состояния. Сопоставим (2.5) с энергией покоя электрона $m_e c^2$:

$$(2.6)\qquad \frac{2\mathrm{Ry}}{m_e c^2} = \frac{m_e e^4}{\hbar^2 \cdot m_e c^2} = \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} = \alpha^2 \approx 10^{-4}.$$

Таким образом, энергетические масштабы атомных и ядерных процессов различаются на четыре порядка величины.

Размер атома

Рассмотрим систему протон–электрон. Согласно теореме вириала, при кулоновском взаимодействии средние значения кинетической T и потенциальной U энергии электрона связаны соотношением

$2T = -U$.

Поэтому с точностью до постоянной величины имеем:

$$m_e V_0^2 \sim \frac{e^2}{a_0}.$$

где a_0 — радиус орбиты электрона. Из последней формулы получим

$$(2.7)\qquad a_0 \sim \frac{\mathrm{e}^2}{m_e V_0^2} = \frac{\mathrm{e}^2 \hbar^2}{m_e e^4} = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5.29 \cdot 10^{-9} \text{ см} = 0.529 \text{ Å}$$

Здесь введена единица измерения ангстрем:

1 Å $=10^{-8}$ см.

Ею часто пользуются при решении задач атомной физики. Величина a_0 называется *боровским радиусом.* Он равен радиусу орбиты электрона в основном состоянии атома водорода.

Дебройлевская длина волны

Далее мы увидим, что электрон, как и любая другая частица, проявляет не только корпускулярные, но и волновые свойства. Для их описания используется *дебройлевская длина волны* λ_D. Оценим её из соображений размерности. По аналогии с формулой (2.1) для электрона как волны имеем

$$\frac{E}{\omega} \sim \hbar,$$

где волновые свойства электрона описываются параметром ω, имеющим размерность частоты. Ему соответствует характерное время $\Delta t = 1/\omega$, откуда

$$m_e V^2 \cdot \Delta t \sim \hbar.$$

Из скорости электрона V и промежутка времени Δt составим комбинацию с размерностью длины:

$$\lambda_{\mathrm{D}} \sim \Delta t \cdot V.$$

Она называется дебройлевской длиной волны и, согласно приведённым выкладкам, равна

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \frac{\hbar}{m_e V}. \tag{2.8}$$

К той же самой величине мы приходим, исходя из соотношения неопределённостей (2.2), если определим длину волны де Бройля как неопределённость положения электрона по одному измерению:

$$\lambda_{\mathrm{D}} = \Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p_x} = \frac{\hbar}{m_e V}.$$

Волновые свойства электрона проявляются в опытах по дифракции электронов на кристалле. Постоянная решётки, то есть расстояние между ионами у большинства кристаллов порядка одного ангстрема. Дифракционные явления наблюдаются у электронов, длина волны которых сравнима с постоянной кристаллической решётки. Такие электроны, согласно (2.5) и (2.7), обладают энергией около 10 эВ.

1.3 Квантовая теория излучения и магнитные явления

В квантовую теорию излучения входят три параметра: заряд, постоянная Планка и скорость света. Сопоставим размеры атома и электрона. Их отношение равно

$$\frac{r_e}{a_0} = \frac{e^2}{m_e c^2} \cdot \frac{m_e e^2}{\hbar^2} = \frac{e^4}{\hbar^2 c^2} = \alpha^2.$$

Классический радиус электрона на четыре порядка величины меньше боровского радиуса, что аналогично соотношению энергий (2.6). Последний результат не должен вызывать удивления, так как энергия кулоновского взаимодействия обратно пропорциональна первой степени расстояния.

Рассмотрим ещё одну важную величину — комптоновскую длину волны, определив её как среднее геометрическое r_e и a_0:

$$\lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{C}} = \sqrt{r_e a_0} = \frac{\hbar}{m_e c}. \tag{3.1}$$

Она характеризует эффект отдачи: обусловленное квантовой природой света изменение энергии фотона при комптоновском рассеянии. Длина волны фотона, рассеянного на прямой угол неподвижным свободным электроном возрастает на величину

$$\Lambda_{\mathrm{C}} = 2\pi \lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{C}} = 2.42 \cdot 10^{-2}\ \text{Å}, \tag{3.2}$$

также называемой комптоновской длиной волны. Между тремя масштабами длины имеет место соотношение:

$$r_e : \lambda\!\!\!^{-}_{\mathrm{C}} : a_0 = \alpha^2 : \alpha : 1.$$

Комптоновская длина волны описывает релятивистские эффекты в квантовой электродинамике, например — рождение пар. Если длина волны фотона меньше комптоновской длины волны, то его энергия превышает $m_e c^2$ — масштаб пороговой энергии для рождения электрон–позитронных пар.

Комптоновская длина волны обратно пропорциональна массе частицы. Перейдём от масштаба комптоновской длины волны электрона к размерам ядра. Тогда величине $\bar{\lambda} \approx 10^{-13}$ ñì соответствуют частицы в сотни раз массивнее электрона. Такие частицы существуют — это π–мезоны с массой 270 m_e, они определяют взаимодействие нуклонов в ядре.

Масштабы частоты и времени, характерная длина волны излучения.

Оценим период обращения электрона вокруг протона в атоме водорода. Отношение

$$t_0 = \frac{a_0}{V_0} = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} \approx 2.5 \cdot 10^{-17} \text{ с}$$

называется атомной единицей времени, а обратная величина

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0} = \frac{m_e e^4}{\hbar^3} \approx 4.1 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1},$$

соответственно, атомной единицей частоты. В случае удалённых от ядра орбит частота излучаемого кванта не сильно отличается от ω_0. Отсюда следует оценка длины волны

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \approx 1000 \text{ Å},$$

Весьма важно, что длина волны света в тысячи раз превышает размеры атома. Этот факт позволяет выполнить классификацию типов излучения, а именно — выделить его дипольную и квадрупольную составляющие.

Напряженность электрического поля и магнитный момент

Оценим величину электрического поля в атоме:

$\mathcal{E} \sim e / a_0 \approx 300 \cdot 4.8 \cdot 10^{-10} / (0.5 \cdot 10^{-8})^2 \approx 5 \cdot 10^9$ В / см.

Столь сильное поле задаёт жёсткую структуру атома. Напомним, что размерный множитель 300 соответствует переходу от единиц напряженности системы СГСЭ к вольтам, более удобным единицам.

Пусть электрон вращается на расстоянии r от ядра со скоростью V по круговой орбите, площадь которой обозначим S. При движении электрона возникает ток величиной $I = eV / r$. Согласно определению, величина магнитного момента равна отношению

$$\mu = \frac{IS}{c} \approx \frac{e}{c}\frac{V}{r} r^2 = \frac{epr}{m_e c}.$$

Магнитный момент $\boldsymbol{\mu}$, как и напряжённость магнитного поля $\mathbf{H}$, является псевдовектором, или аксиальным вектором. От обычного, то есть, полярного вектора они отличаются сменой направления при операции инверсии координат.

Магнитный момент любой системы определяет её потенциальную энергию U в магнитном поле:

(3.3) $$U = -(\boldsymbol{\mu}\mathbf{H}).$$

В задаче о вращении электрона вокруг ядра произведение *pr,* согласно соотношению неопределённостей (2.2), должно быть порядка $\hbar$, откуда

$$\mu \approx \frac{e\hbar}{m_e c}.$$

Величина

(3.4) $$\mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 9.2740154 \cdot 10^{-21} \approx 0.9 \cdot 10^{-20} \text{ эрг/Гс}$$

называется магнетоном Бора. Она определяет магнитные свойства атома.

Эффект Зеемана.

Применим результаты предыдущего раздела к эффекту Зеемана — расщеплению спектральных линий в магнитном поле. Сдвиг линий происходит вследствие изменения положения энергетических уровней под действием внешнего магнитного поля. Оценим величину поля, которое обусловливает изменение энергии уровня ΔE, скажем, на одну миллионную его первоначального значения E:

$$\frac{\Delta E}{E} \sim 10^{-6}.$$

Согласно разделу (1.2), энергия электрона в атоме порядка одного ридберга, откуда вытекает оценка $\Delta E \sim 10^{-11}$ эрг. Подставляя $\Delta E = U$ в формулу (3.3), получим

$$H = \frac{\Delta E}{\mu} \approx 10^3 \text{ Гс}.$$

Поля такой величины встречаются в отдельных областях поверхности Солнца и некоторых звёзд, такие области называются «магнитными пятнами», или просто «пятнами». Магнитные пятна занимают относительно небольшую часть, около десяти процентов поверхности звезды. На большей части поверхности Солнца и других звёзд магнитное поле также присутствует, но его величина не превышает нескольких гаусс.

1.4 Квантовая теория гравитации

Квантовая теория гравитации ещё не создана. Тем не менее, мы можем сделать некоторые выводы из анализа размерностей, опираясь на гравитационную постоянную

$G = 6.67390 \cdot 10^{-8}$ см^3 с$^{-2}$ г$^{-1}$,

постоянную Планка $\hbar$ и скорость света c. Из этих трёх величин получим выражения для планковской длины

$$l_{\text{P}} \sim \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см},$$

планковского времени

$$t_{\text{P}} \sim \frac{l_{\text{P}}}{c} \approx 5.4 \cdot 10^{-44} \text{ с}$$

и планковской массы

$$m_P \sim \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ г},$$

На этих масштабах ломается привычная для нас метрика, а геометрия пространства приобретает квантовые свойства. Отметим относительно большую величину планковской массы:

$$\frac{m_P}{m_e} \sim 10^{22}.$$

Частицу с массой m_P называют максимоном (фридмоном). Энергия, соответствующая массе покоя максимона, равна $m_P c^2 \approx 5 \cdot 10^{28}$ эВ. Частицы с такой энергией в космосе не наблюдаются.

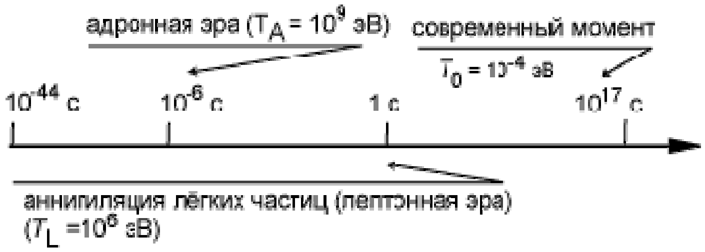


Рис. 1.1. Некоторые моменты развития Вселенной.

По теории Гамова в момент времени ~ t_P произошёл так называемый «большой взрыв». То, что осталось от него, мы наблюдаем в виде реликтового излучения. В настоящий момент времени t_0 температура излучения равна $T_0 = 2.73$ K $\approx 10^{-4}$ эВ.

Допустим, что температура T и время t связаны между собой по закону

$$T \sim \frac{1}{t^{\nu}}.$$

В момент времени $t_L \approx 1$ с при температуре $T_L \approx 10^6$ эВ происходит аннигиляции лептонов. Зная t_0 и t_L, а так же соответствующие этим моментам времени температуры, найдем показатель ν:

$$\frac{T_L}{T_0} = \left(\frac{t_0}{t_L}\right)^{\nu}, \qquad \frac{10^6}{10^{-4}} = 10^{17\nu}.$$

Отсюда $\nu = 10/17 \approx 1/2$. Теперь мы можем оценить температуру в момент времени t_P:

$$T_P = T_0 \sqrt{\frac{t_0}{t_P}} = 10^{28} \text{ эВ}.$$

Полученное значение энергии по порядку величины совпадает с энергией максимонов. Таким образом, на временах порядка t_P, действительно могли существовать частицы больших энергий, порядка энергии максимонов.