

Глава 2. Излучение абсолютно черного тела

В физике часто рассматривается модель, в которой тело находится в термодинамическом равновесии с собственным излучением. В этом случае принято говорить о «чёрном теле» и о «чернотельном излучении». Поле излучения внутри чёрного тела однозначно определяется его температурой. Исследование спектра чёрного тела явилось началом теории атома. Хотя излучение чёрного тела в области малых частот может быть объяснено в рамках классической физики, его полный анализ можно провести только в рамках квантовой теории. Это следует хотя бы из того, что в аналитические формулы, описывающие спектр чёрного тела, входит введённая Планком постоянная \hbar . Строго говоря, в природе абсолютно чёрное тело в чистом виде не существует, но его моделью может служить замкнутая полость с малым отверстием (рис.2.1).

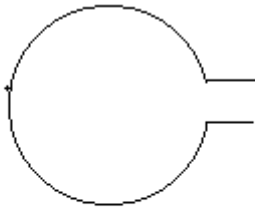


Рис.2.1. Возможная реализация абсолютно чёрного тела.

Спектральную плотность излучения чёрного тела будем обозначать U_ω . Её размерность — эрг/(см³·рад/с). Из соотношения

$$(1) \quad \omega = 2\pi \nu$$

между круговой ω и линейной ν частотой следует, что U_ω в 2π раз меньше плотности энергии U_ν , рассчитанной на один герц:

$$U_\nu = 2\pi U_\omega.$$

В теоретических построениях часто пользуются величиной U_ω , а в практических расчётах предпочитают U_ν . Важную роль в приложениях играет интенсивность излучения, которую для случая чёрного тела принято обозначать B_ω и B_ν .

Результаты наблюдений часто рассчитываются на единицу длины волны λ , а не частоты. Соответствующая интенсивность обозначается B_λ , а плотность энергии — U_λ . Количество энергии в определённом спектральном интервале, конечно, не зависит от выбора шкалы, поэтому U_ω , U_ν и U_λ связаны друг с другом соотношением

$$(2) \quad U_\lambda \Delta\lambda = U_\omega \Delta\omega = U_\nu \Delta\nu.$$

Диапазоны длин волн $\Delta\lambda$ и частот $\Delta\omega$ и $\Delta\nu$ определяются функциональной зависимостью

$$(3) \quad \lambda = c/\nu, \quad \nu = 2\pi \omega,$$

из которой следует

$$(4) \quad \Delta\omega = 2\pi \cdot \Delta\nu, \quad \Delta\lambda = \frac{c}{\nu^2} \cdot \Delta\nu = \frac{2\pi c}{\omega^2} \cdot \Delta\omega.$$

Следует обратить внимание на то, что спектральные интервалы равны модулям дифференциалов соответствующих переменных. Например, из (2.3) следует отрицательное значение производной $d\lambda/d\nu$, в то время как $\Delta\lambda$ и $\Delta\omega$ существенно положительные величины.

Поле излучения внутри чёрного тела изотропно, поэтому его поток равен нулю. Тем не менее, существует специальная модель, в которой рассматривается не внутренняя область, а граница

изотропного источника. Излучение границы анизотропно и, следовательно, поток от неё отличен от нуля. В рамках такой модели справедлив известный закон Стефана–Больцмана для полного, проинтегрированного по всему спектру потока излучения от чёрного тела: поток пропорционален четвёртой степени температуры.

2.1. Особенности спектра излучения

В этом разделе мы изложим основные результаты экспериментов, на которых основана теория излучения чёрного тела.

Формула Рэлея-Джинса

В диапазоне предельно малых частот,

$$(1.1) \quad \hbar\omega \ll T,$$

именуемой областью Рэлея–Джинса, плотность энергии пропорциональна температуре T и квадрату частоты ω :

$$(1.2) \quad U_\omega \propto T\omega^2$$

На рис.2.1.1 эта область помечена РД. Формула Рэлея-Джинса может быть выведена чисто

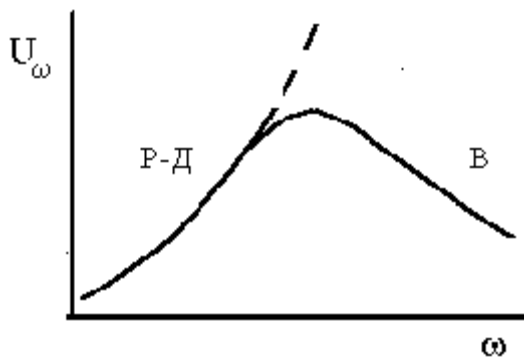


Рис.2.1.1. Спектр излучения абсолютно чёрного тела.

классическим путём, без привлечения квантовых представлений. Чем выше температура чёрного тела, тем шире диапазон частот, в котором справедлива эта формула. Она объясняется в классической теории, но её нельзя распространять на высокие частоты (пунктирная линия на рис.2.1.1), так как просуммированная по спектру плотность энергии в этом случае бесконечно велика:

$$\int_0^\infty U_\omega d\omega \rightarrow \infty.$$

Эту особенность закона Рэлея-Джинса называют «ультрафиолетовой катастрофой».

Формула Вина.

В диапазоне больших частот (область В на рис.2.1.1) справедлива формула Вина:

$$(1.3) \quad U_\omega \propto \omega^3 \exp\left(-\frac{a\omega}{T}\right).$$

Хорошо видно, что правая часть меняется немонотонно. Если частота не слишком велика, то преобладает множитель ω^3 и функция U_ω возрастает. По мере увеличения частоты рост U_ω

замедляется, она проходит через максимум, а затем убывает за счёт экспоненциального множителя. Наличие максимума в спектре излучения отличает виновский диапазон от области Рэлея-Джинса.

Чем больше температура тела, тем выше граничная частота, начиная с которой выполняется формула Вина. Величина параметра a в экспоненте правой части зависит от выбора единиц, в которых измеряются температура и частота. Вывод формулы Вина требует привлечения квантовых представлений о природе света.

Закон смещения Вина

Обозначим ω_{\max} частоту максимума функции Планка. Закон смещения Вина гласит, что она пропорциональна температуре, следовательно:

$$\frac{\omega_{\max}}{T} = \text{const.}$$

Константа в правой части зависит от выбора единиц частоты и температуры. Кроме того, она различна для функций B_ν и B_λ .

Закон Стефана-Больцмана.

Закон Стефана-Больцмана заключается в том, что плотность энергии чёрнотельного излучения, проинтегрированная по всем частотам, пропорциональна четвёртой степени температуры:

$$U = \int_0^\infty U_\omega d\omega = aT^4.$$

Он часто используется в астрономии при определении светимости звезды по её температуре. Для этого необходимо перейти от плотности излучения к наблюдаемой величине — потоку. Формула для интегрального по спектру потока излучения будет выведена в третьей главе.

2.2. Число осцилляторов в единице объёма

Попытаемся объяснить все приведённые выше экспериментальные факты. Для этого введём представление об осцилляторах, или о стоячих волнах внутри некоторой полости (например, как на рис.2.1). Количество энергии излучения $U_\omega d\omega$ определяется числом осцилляторов dN_ω в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, в объеме V , при средней энергии одного осциллятора $\langle E \rangle$:

$$(2.1) \quad U_\omega d\omega = \frac{dN_\omega \langle E \rangle}{V}$$

Перейдём к вычислению dN_ω и $\langle E \rangle$.

Число осцилляторов

Подсчёт числа осцилляторов мы выполним по методу, предложенному Рэлеем и реализованному Джинсом. Число осцилляторов dN_ω равно количеству стоячих волн в рассматриваемом объеме. Подсчёт числа колебаний можно выполнить и в терминах длин волн

$$(2.2) \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

для интервала от λ до $\lambda + d\lambda$, но удобнее проводить его в шкале волновых чисел

$$(2.3) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$$

для интервала от k до $k + dk$. Рассмотрим волны в кубе $L \times L \times L$. Введём волновой вектор \mathbf{k} проекции которого на оси координат равны k_x, k_y, k_z . Внутри рассматриваемого объёма по каждому направлению должно укладываться целое число волн:

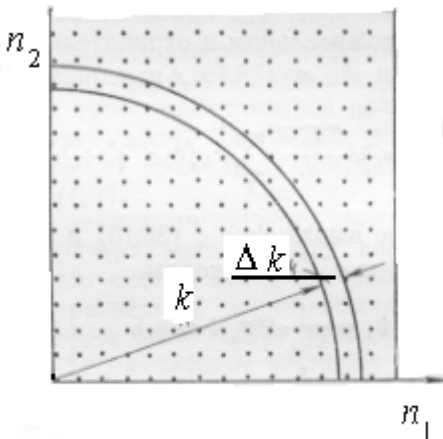


Рис. 2.1 Моды колебаний на плоскости.

$$(2.4) \quad \begin{aligned} k_x &= \frac{2\pi N_x}{L} \\ k_y &= \frac{2\pi N_y}{L}, \\ k_z &= \frac{2\pi N_z}{L} \end{aligned}$$

где N_x , N_y и N_z — целые положительные числа. Совокупность таких значений k_x , k_y , k_z обеспечивает наличие узлов на гранях куба. Модуль k волнового вектора выражается через его проекции, как модуль любого вектора:

$$(2.5) \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}.$$

Для нахождения числа осцилляторов удобно воспользоваться простым геометрическим приёмом. Выберем N_x , N_y и N_z из формулы (2.4) за координатные оси в воображаемом пространстве чисел. На рис. 2.1 изображена часть этого пространства. Каждой тройке чисел N_x , N_y и N_z на этом рисунке отвечает точка. Введём величину

$$(2.6) \quad N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2 + N_z^2}.$$

Если числа N_x , N_y и N_z достаточно велики, то их функция N будет меняться почти непрерывно и на рис.(2.1) изобразится радиус-вектором. Согласно (2.4–6), модуль волнового вектора однозначно выражается через N :

$$(2.7) \quad k = N \frac{2\pi}{L}.$$

Отсюда следует, что число волн с модулем волнового вектора, лежащим в интервале от k до $k + dk$, равно числу чисел N в интервале от N до $N + dN$. Последнее равно числу точек, попадающих в шаровой слой между сферами радиусом N и $N + dN$, а именно,

$$g(N)dN = 4\pi N^2 dN.$$

Таким образом, число волн, или число осцилляторов с величиной волнового числа между k и $k + dk$ и с определённым направлением поляризации в объёме $V = L^3$ равно

$$g(k)dk = 4\pi N^2 dN = \frac{1}{2\pi^2} k^2 dk L^3.$$

Последнее равенство справа получилось после дифференцирования (2.7). Нам осталось умножить полученное выражение на 2 — число независимых направлений поляризации излучения, и, воспользовавшись формулой (2.3), перейти к шкале частот:

$$(2.8) \quad \frac{dN_\omega}{V} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\omega^2 d\omega}{c^3}.$$

В силу большой важности (2.8), приведём другой его вывод, основанный на формуле (2.3) первой главы

$$dN = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{dp_x dp_y dp_z dx dy dz}{h^3}$$

для числа квантовых состояний dN в элементе фазового объёма $d\Gamma$. Проинтегрировав последнюю формулу по всем пространственным координатам, получим, что число квантов в объёме V и в элементе $dp_x dp_y dp_z$ пространства импульсов равно $V dp_x dp_y dp_z / h^3$. Теперь перейдём к сферическим координатам в пространстве импульсов

$$dp_x dp_y dp_z = p^2 dp \sin\theta d\varphi d\theta$$

и проинтегрируем по угловым переменным:

$$\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi.$$

Итак, в пространстве импульсов объём шарового слоя радиусом p и толщиной dp равен $4\pi p^2 dp$. С помощью формулы $p = \hbar\omega/c$ перейдём от интервала импульсов фотона к диапазону частот излучения:

$$p^2 dp = \left(\frac{\hbar}{c}\right)^3 \omega^2 d\omega,$$

откуда следует выражение для числа квантов в объёме V и в интервале частот $d\omega$ с заданным направлением поляризации:

$$dN_\omega = V \frac{\omega^2 d\omega}{2\pi^2 c^3}.$$

Если теперь учесть наличие у фотона двух независимых поляризаций, то снова получится формула (2.8). Примечательно, что она не содержит постоянной Планка. Это обстоятельство служит указанием на то, что она может быть получена в рамках классического рассмотрения.

Теперь вычислим среднюю энергию осциллятора. Рассмотрим последовательно случаи классического и квантового осцилляторов

2.3 Средняя энергия классического осциллятора

Энергия одномерного осциллятора выражается через импульс p и координату q :

$$E(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}.$$

В классической статистике равновесное распределение частиц (в данном случае осцилляторов) по энергиям определяется формулой

$$W(E) = A \exp(-E/T).$$

Поэтому средняя энергия равна

$$(3.1) \quad \langle E \rangle = \frac{A \iint E(p, q) \exp(-E(p, q)/T) dp dq}{A \iint \exp(-E(p, q)/T) dp dq}.$$

Введем обозначения

$$P = \frac{p}{\sqrt{2m}}, \quad Q = q\omega\sqrt{\frac{m}{2}},$$

тогда

$$\langle E \rangle = \frac{\iint (P^2 + Q^2) \exp\left(-\frac{P^2 + Q^2}{T}\right) dP dQ}{\iint \exp\left(-\frac{P^2 + Q^2}{T}\right) dP dQ}.$$

В последнем интеграле переменные P и Q разделяются. После сокращения общих множителей в числителе и знаменателе приходим к формуле

$$\langle E \rangle = \frac{\int P^2 \exp(-P^2/T) dP}{\int \exp(-P^2/T) dP} + \frac{\int Q^2 \exp(-Q^2/T) dQ}{\int \exp(-Q^2/T) dQ}.$$

Интегралы в числителе и знаменателе обоих слагаемых могут быть приведены к виду

$$(3.2) \quad I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{T}\right) dx.$$

Поскольку в нашем случае n принимает только два значения: 0 и 2, то подынтегральная функция в (3.2) — четная и выражение для интегралов $I_{0,2}$ могут быть записаны в виде

$$I_n = 2 \int_0^{\infty} x^n \exp\left(-\frac{x^2}{T}\right) dx, \quad n = 0, 2.$$

С помощью последней формулы переписывается выражение для энергии:

$$\langle E \rangle = \frac{2I_0 I_2}{I_0^2} = 2 \frac{I_0}{I_1}.$$

Для вычисления интегралов I_n воспользуемся определением гамма-функции

$$\Gamma(\nu + 1) = \int_0^{\infty} t^{\nu} e^{-t} dt,$$

из которого следует

$$\int_0^{\infty} t^{\nu} \exp(-at^2) dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{a^{\frac{\nu+1}{2}}}.$$

Тогда интегралы I_n запишутся в виде

$$I_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \cdot T^{\frac{n+1}{2}}.$$

Теперь можно выписать интересующее нас выражение для средней энергии одномерного осциллятора

$$(3.3) \quad \langle E \rangle = 2 \frac{\Gamma(3/2) T^{3/2}}{\Gamma(1/2) T^{1/2}} = 2 \frac{\sqrt{\pi}/2}{\sqrt{\pi}} \cdot T = T.$$

Мы получили известный результат: в состоянии термодинамического равновесия на каждую степень свободы приходится энергия $T/2$, а в сумме на один осциллятор — энергия T .

Вернемся к формуле (2.1). Подставляя в неё величину средней энергии из (3.3), получим

$$U_{\omega} d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} T \sim \omega^2 T d\omega.$$

Итак, закон Рэлея–Джинса получается на основании классических рассуждений.

2.4 Квантовый осциллятор

Как отмечалось выше, формулу Вина нельзя получить на основании классических представлений. Планку удалось воспроизвести спектр излучения чёрного тела во всём диапазоне частот после того, как он высказал предположение о дискретности энергетического спектра осцилляторов. Гипотеза Планка входила в явное противоречие с представлениями классической физики. Согласно Планку, испускание и поглощение излучения происходит порциями энергии (квантами)

$$(4.1) \quad \varepsilon_0 = \hbar\omega,$$

где ω — частота осциллятора. Сам осциллятор находится в дискретных энергетических состояниях

$$(4.2) \quad E = E_n = n \varepsilon_0 = n \hbar \omega,$$

пронумерованных целым неотрицательным числом

$$(4.3) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, энергетические уровни осциллятора образуют, как говорят, эквидистантный спектр: разность энергии любых двух соседних уровней одна и та же — $\hbar\omega$. Спектр энергии в таком случае

представляет собой дискретный набор уровней. Осциллятор может находиться в каждом из этих состояний, а при переходах между соседними состояниями излучается или поглощается энергия $\hbar\omega$.

Согласно гипотезе Планка, чтобы найти среднюю энергию одномерного осциллятора, нужно интегралы в (3.1) заменить суммами:

$$(4.4) \quad \langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right)}.$$

Введя обозначение

$$x = \frac{E_n}{T},$$

перепишем выражение для $\langle E \rangle$ в виде:

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right)} = \hbar\omega \frac{A}{B}.$$

Делитель

$$(4.5) \quad B = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} + \dots$$

представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем e^{-x} :

$$B = \frac{1}{1 - e^{-x}}.$$

Если продифференцировать ряд (4.5) по x , то получим

$$\frac{dB}{dx} = -e^{-x} - 2e^{-2x} - 3e^{-3x} - \dots - ne^{-nx} + \dots = -\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-nx},$$

откуда следует выражение для A :

$$A = -\frac{dB}{dx} = \frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2}.$$

Теперь легко убедиться, что искомое отношение A/B равно

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}.$$

Итак, средняя энергия кванта определяется температурой излучения T и элементарной порцией энергии $\hbar\omega$:

$$(4.6) \quad \langle E \rangle = \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}.$$

Полезно выделить так называемые числа заполнения

$$(4.7) \quad n_{\omega} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1},$$

которые представляют собой число фотонов, приходящихся на одну моду колебаний. Тогда

$$\langle E \rangle = \hbar\omega \cdot n_{\omega}.$$

Подставляя (4.6) и (2.8) в (2.1), получим полное выражение для плотности энергии с учётом квантовых эффектов:

$$(4.8) \quad U_{\omega} d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \hbar\omega \cdot n_{\omega} = \frac{\hbar\omega^3 d\omega}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}.$$

Это есть окончательное выражение для формулы Планка, дающей спектр излучения абсолютно чёрного тела во всём диапазоне частот. Спектральное распределение числа фотонов легко получается из плотности энергии:

$$(4.9) \quad N_{\omega} = \frac{U_{\omega}}{\hbar\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1}.$$

Ниже будут приведены формулы для интенсивности излучения и потока от границы чёрного тела.

2.5 Примеры

В каких условиях можно ожидать проявления квантовых свойств осцилляторов? В общем случае — когда малы числа заполнения. Рассмотрим следующие примеры.

1) *Макроскопический случай*. Частота колебаний механических приборов — пружин, маятников — по порядку величины близка к обратной секунде: $\omega \sim 1 \text{ с}^{-1}$. Соответствующий квант энергии равен

$$\varepsilon = \hbar\omega \sim 10^{-27} \text{ эрг} \sim 10^{-15} \text{ эВ} \sim 10^{-11} \text{ К}.$$

Энергетическая щель между уровнями получилась настолько малой, что ни при каких достижимых в настоящее время температурах квантования таких осцилляторов мы наблюдать не можем.

2) *Радиодиапазон*. Длина волны, на которой работает 100-метровый телескоп под Бонном, равна 6 см. Частота излучения равна $\omega = 2\pi c/\lambda \sim 3 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$, а энергия кванта

$$\varepsilon \sim 3 \cdot 10^{-17} \text{ эрг} \sim 3 \cdot 10^{-5} \text{ эВ} \sim 0.3 \text{ К}.$$

Известно, что этот инструмент в состоянии измерять потоки радиоизлучения около $10^{-28} / (\text{Вт м}^{-2} \text{ Гц})$ в полосе частот $\Delta\nu$ от 200 МГц до 500 МГц. Примем

$$\Delta\nu = 300 \text{ МГц} = 3 \cdot 10^8 \text{ Гц}.$$

Поток излучения во всей полосе частот равен

$$3 \cdot 10^{-20} \text{ Вт м}^{-2} = 3 \cdot 10^{-17} \text{ эрг см}^{-2} \text{ с}^{-1}.$$

Сравнивая эту величину с энергией кванта 10^{-17} эрг, приходим к выводу, что телескоп регистрирует в среднем приход трёх фотонов за секунду на один квадратный сантиметр. Здесь уже могут проявляться квантовые свойства излучения. Однако возникает непростой вопрос: как на площадке размером один квадратный сантиметр локализуется фотон с длиной волны 6 см. Этот вопрос мы рассмотрим ниже.

3) *Атом*. Характерная частота в данном случае равна частоте обращения электрона вокруг ядра и, согласно приведённым выше оценкам, составляет примерно $\omega \sim 10^{16} \text{ с}^{-1}$. Отсюда следует диапазон энергий:

$$\varepsilon \sim 10^{-11} \text{ эрг} \sim 10 \text{ эВ} \sim 10^5 \text{ К}.$$

В этом случае дискретность энергетических уровней является основным фактором.

2.6 Предельные случаи формулы Планка

Сведения о предельных случаях больших и малых частот собраны в таблице. Слева — низкие частоты (область Рэлея–Джинса), справа — высокие (область Вина).

$\hbar\omega \ll kT$	$\hbar\omega \gg kT$
Большое число осцилляторов задействовано в колебаниях	Заселение возбуждённых состояний осциллятора экспоненциально малó
$n_\omega \approx T/\hbar\omega \gg 1$	$n_\omega \approx \exp(-\hbar\omega/T) \ll 1$
$\langle E \rangle = T \ll \hbar\omega$	$\langle E \rangle = \hbar\omega \cdot \exp(-\hbar\omega/T) \ll \hbar\omega$
$U_\omega d\omega = \omega^2 T d\omega/(\pi^2 c^3)$	$U_\omega d\omega = \hbar\omega^3 \exp(-\hbar\omega/T) d\omega/(\pi^2 c^3)$

Формулы в последней строке таблицы представляют собой предельные случаи функции Планка.

2.7 Закон смещения Вина

Как мы видели выше, плотность энергии излучения чёрного тела как функция частоты при фиксированной температуре не является монотонной: она возрастает в классическом диапазоне спектра, пока энергия квантов значительно меньше температуры, и убывает при $\hbar\omega \gg T$.

Частота максимума ω_{\max} зависит от температуры. С целью приближённо оценить зависимость $\omega_{\max}(T)$ рассмотрим сначала виновскую область спектра. Виновское приближение для плотности энергии обозначим индексом «W». Согласно (4.7), имеем:

$$(7.1) \quad U_\omega^W = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T}\right).$$

Введём безразмерную переменную

$$(7.2) \quad x = \frac{\hbar\omega}{T}$$

и выразим через неё плотность энергии:

$$(7.3) \quad U_\omega^W = \frac{T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^2} f^W(x),$$

где

$$(7.4) \quad f^W(x) = x^3 e^{-x}$$

Максимум функции $f^W(x)$ приходится на значение аргумента

$$(7.5) \quad x_{\max}^W = 3.$$

Так как $e^3 \approx 20$, то максимум действительно находится в виновской области спектра, причём ошибка приближения (7.5) не должна превосходить пяти процентов.

Уточним полученную величину частоты максимума. Для этого формулу Планка (4.7) выразим в безразмерной форме

$$U_\omega = \frac{T^3}{\pi^2 c^3 \hbar^2} f(x), \quad f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}.$$

Условие $df/dx = 0$ приводит к трансцендентному уравнению

$$3(1 - e^{-x}) = x.$$

Согласно решению задачи о максимуме функции Вина, будем искать корень последнего уравнения в виде $x = 3 - \delta$, предполагая малое значение δ . Запишем уравнение для δ :

$$\delta = e^{-3+\delta}$$

и разложим экспоненту e^δ по малому параметру

$$e^\delta \approx 1 + \delta + \delta^2/2.$$

Уравнение из трансцендентного относительно x становится квадратным по δ :

$$\frac{3}{2}\delta^2 - (e^3 - 3)\delta + 3 = 0.$$

Нужный нам корень равен

$$\delta = \frac{e^3 - 3 - \sqrt{(e^3 - 3)^2 - 18}}{3} = 0.178$$

откуда

$$x = 3 - \delta = 2.822.$$

Подставляя полученное значение x в (7.2) и выражая температуру в градусах Кельвина, приходим к формулировке закона смещения Вина в шкале частот:

$$(7.6) \quad T \cdot \lambda_{\max} = 0.50996 \text{ см} \cdot \text{К}.$$

Здесь длина волны выражена в сантиметрах.

2.8 Частота максимума в шкале длин волн.

Выше мы упоминали о двух способах представления спектральных характеристик плотности энергии излучения: в расчёте на единицу частоты U_ω и на единицу длины волны U_λ . Из (2) следует

$$(8.1) \quad U_\lambda = U_\omega \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{16\pi^2 c \hbar}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi c \hbar}{\lambda T}\right) - 1}.$$

По аналогии с (7.2) введём безразмерную переменную

$$x = 2\pi \hbar c / (\lambda T).$$

Как и выше, решение задачи определяется максимумом безразмерной функции, на этот раз

$$(8.2) \quad f(x) = \frac{1}{x^5 (e^x - 1)}.$$

В приближении Вина имеем

$$(8.3) \quad x_{\max}^W = 5.$$

Численно $e^5 \approx 150$, поэтому в данном случае следует ожидать, что (8.3) ещё точнее, чем (7.5) и здесь ошибка не превышает одного процента.

Проделав выкладки, аналогичные выполненным в предыдущем разделе, для разности

$$\delta = 5 - x$$

получим

$$\delta \approx 0.0349,$$

и, соответственно,

$$(8.4) \quad x_{\max} = 4.965$$

Выпишем закон смещения Вина для распределения спектра по длинам волн:

$$(8.5) \quad T \lambda_{\max} = 0.28979 \text{ см} \cdot \text{К},$$

где температура выражена в градусах Кельвина, а длина волны — в сантиметрах.

Итак, максимум функции Планка приходится на разные длины волн, в зависимости от того, изучаем мы распределение по частотам или по длинам волн. Например, Солнце светит наиболее ярко на длине волны 5500\AA , если измерения ведутся в шкале длин волн, и 8800\AA — в шкале частот. Восприятие света человеческим глазом ближе к шкале длин волн. Поэтому в оценках положения максимума в спектре излучения Солнца обычно принято пользоваться формулой (8.5). Однако, если

мы имеем дело со спектральным прибором, работающим в шкале частот — например, со спектральной решёткой, — то правильный результат даёт (7.6).