

### 3. Закон Стефана–Больцмана

В предыдущей главе мы вывели зависимость плотности энергии излучения от частоты. Во многих задачах используются интегральные по спектру характеристики: плотность энергии, интенсивность и поток. Сначала вычислим плотность энергии. Затем определим понятия интенсивности и потока и выведем формулу для полной интенсивности. В конце главы сформулируем модель границы изотропного источника, в рамках которой справедлива формула Стефана–Больцмана.

#### 3.1 Интегральная по спектру плотность энергии

Проинтегрируем формулу (4.7) главы 2 по всему интервалу частот:

$$U = \int_0^{\infty} U_{\omega} d\omega.$$

Переходя, как обычно, к безразмерной переменной

$$x = \frac{\hbar\omega}{T},$$

получим, что плотность энергии пропорциональна четвёртой степени температуры:

$$U = \frac{T^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}.$$

Вычислим безразмерный интеграл в правой части последней формулы. Он является частным случаем интегралов вида

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1} dx}{e^x - 1},$$

соответствующим  $n = 4$ . Разложим дробь в подынтегральном выражении:

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-mx}.$$

Искомый интеграл представляется в виде ряда

$$I_n = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(m+1)x} x^{n-1} dx,$$

каждое слагаемое которого аналитически выражается через гамма-функцию

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{\nu} dx = \frac{\Gamma(\nu + 1)}{a^{\nu+1}}.$$

Следовательно,

$$I_n = \Gamma(n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^n} = \Gamma(n) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n}.$$

Сумма в последней формуле известна как дзета–функция Римана:

$$\zeta(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \dots$$

Выпишем ряд её значений, некоторые из которых понадобятся нам в дальнейшем:

n	$\zeta(n)$	
	аналит.	число
2	$\pi^2/6$	1.645
3		1.202
4	$\pi^4/90$	1.082
5		1.037

Функция  $\zeta(n)$  имеет аналитическое выражение при чётных значениях аргумента. Итак, множитель пропорциональности в формуле, выражающей зависимость плотности энергии  $U$  от температуры  $T$ :

$$(1.1) \quad U = a \cdot T^4,$$

равен

$$(1.2) \quad a = \frac{\pi^2 k^4}{15c^2 \hbar^3} = 7.56464 \cdot 10^{-15} \text{ эрг см}^{-3} \text{ К}^{-4}.$$

В последней формуле присутствует постоянная Больцмана

$$k = 1.3802 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/К},$$

означающая, что температура в ней выражена в градусах Кельвина.

Иногда множитель  $a$  называют постоянной Стефана–Больцмана для плотности энергии. Используется также другая форма закона Стефана–Больцмана, связывающая полный поток  $F$  и температуру чёрного тела:

$$F = \sigma T^4.$$

Чтобы определить величину  $\sigma$ , необходимо сформулировать модель, в которой поток от чёрного тела отличен от нуля. Такая модель будет изложена в следующих разделах, а сейчас вычислим полное число квантов  $N_\phi$  в единичном объёме чёрного тела. Для этого проинтегрируем по всем частотам формулу (4.8) второй главы:

$$N_\phi = \frac{1}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1} = \frac{\Gamma(3)\zeta(3)}{\pi^2} \left(\frac{T}{c\hbar}\right)^3.$$

Если измерять температуру в градусах Кельвина, то

$$(1.3) \quad N_\phi \approx 20.3 \cdot T^3.$$

В качестве примера оценим плотность числа фотонов реликтового излучения, температура которого, как известно, равна 2.73 К:

$$N_\phi \approx 400 \frac{\text{фотонов}}{\text{см}^3}.$$

Последняя величина значительно превышает среднюю плотность частиц во Вселенной, которая по разным оценкам лежит в диапазоне от  $10^{-3} \text{ см}^{-3}$  до  $10^{-6} \text{ см}^{-3}$ .

### 3.2 Основные понятия теории излучения

Описание поля излучения основано на понятии интенсивности как энергии, протекающей через

единичную площадку за единицу времени в заданном направлении в избранном интервале частот. Хотя интенсивность является характеристикой только поля излучения и не зависит от способа измерения, для её определения полезно ввести представление о некотором абстрактном приборе, который мы назовём «контрольной площадкой».

Контрольной площадкой будем считать плоскую поверхность небольших размеров (рис. 2.1), на которой задано направление. Обозначим через  $\Delta S$  её площадь, а  $\mathbf{n}$  — перпендикулярный ей единичный вектор.

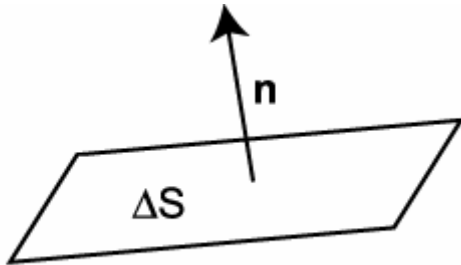


Рис.3.2.1 Контрольная площадка

Направление излучения характеризуется двумя величинами: вектором  $\mathbf{k}$  и телесным углом  $\Delta\Omega$  вокруг него. При известных  $\mathbf{k}$  и  $\Delta\Omega$  говорят об «излучении в направлении  $\mathbf{k}$  внутри телесного угла  $\Delta\Omega$ ». Иногда речь идёт просто об излучении в определённом направлении  $\mathbf{k}$ , при этом телесный угол  $\Delta\Omega$  подразумевается.

### Интенсивность

Понятие интенсивности даёт наиболее полное представление о пространственном и частотном распределении фотонов (при необходимости — и о состояниях поляризации).

Вначале сосредоточим внимание на той части излучения, которая проходит в направлении вектора  $\mathbf{n}$ . Величины  $\Delta S$  и  $\Delta\Omega$  положим настолько малыми, что излучение можно считать однородным вдоль площадки и не зависящим от направления внутри телесного угла  $\Delta\Omega$ . Будем следить за прохождением излучения в течение столь короткого промежутка времени, что никакие его характеристики не успевают измениться. В таких условиях количество энергии  $\Delta E$ , протекшей через площадку за время  $\Delta t$  в интервале частот  $\Delta\omega$ , пропорционально произведению  $\Delta S \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t$ . Следовательно, отношение

$$(2.1) \quad \frac{\Delta E}{\Delta S \cdot \Delta\Omega \cdot \Delta\omega \cdot \Delta t}$$

не зависит от размеров контрольной площадки, продолжительности измерения и выбранного угла раствора.

Но последнюю формулу ещё нельзя считать полноценной характеристикой поля излучения, так как осталась зависимость от направления площадки. Действительно, если наклонить площадку так, что векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{n}$  образуют угол  $\theta$ , то в том же самом поле излучения количество энергии, прошедшей через площадку, уменьшится пропорционально  $|\cos\theta|$ .

Величина энергии, протекающей сквозь площадку, пропорциональна площади её проекции на плоскость волнового фронта:

$$\Delta E \propto \Delta S \cos\theta.$$

Таким образом, если  $\Delta t$ ,  $\Delta S$  и  $\Delta\Omega$  удовлетворяют условиям применимости формулы (2.1), то отношение

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \cos\theta \Delta\omega \Delta\Omega \Delta t}$$

уже не зависит от направления контрольной площадки и может быть принято в качестве характери-

стики поля излучения.

Устремим к нулю  $\Delta S$ ,  $\Delta\omega$ ,  $\Delta\Omega$  и  $\Delta t$ . Получающийся в результате предел называется интенсивностью:

$$(2.2) \quad I_v = \frac{dE}{dS \cos\theta d\Omega d\omega dt}.$$

Интенсивность является фундаментальным понятием. В случае анизотропного поля излучения именно через неё выражаются все другие функции направления и частоты.

### «Входящая» и «выходящая» энергия

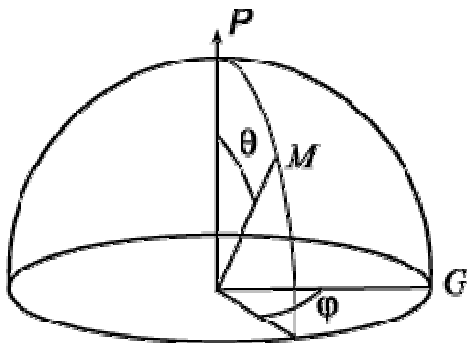
Интенсивность всегда считается положительной величиной, что заставляет нас приписывать определённый знак проходящей через площадку энергии  $\Delta E$ . А именно, из положительности отношения  $\Delta E/\cos\theta$  в (2.2) следует:

$$(2.3) \quad \Delta E \begin{cases} > 0 & \text{при } \theta < \pi/2 \\ < 0 & \text{при } \theta > \pi/2 \end{cases}$$

Из данного соглашения вытекает следующая терминология. Если  $\theta$  — острый угол, то говорят, что излучение «выходит» из площадки, а при тупом угле  $\theta$  оно «входит» в неё. Этой условной терминологии мы будем придерживаться в дальнейшем. Она определяется выбором знака направления вектора  $\mathbf{n}$  вдоль перпендикуляра к контрольной площадке. Сменив направление  $\mathbf{n}$  на противоположное, мы превращаем «входящее» излучение в «выходящее» и наоборот.

### Учёт симметрии

Введём сферическую систему координат (рис.3.2.2). Начало отсчёта помещаем в центр контрольной площадки, а направление на полюс  $P$  выберем вдоль вектора  $\mathbf{n}$ . При таком выборе осей



**Рис. 3.2.2 Сферическая система координат.**

полярный угол некоторой точки  $M$  совпадает со введённым ранее углом  $\theta$  между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{k}$ . Плоскость экватора совпадает с контрольной площадкой. Азимутальный угол  $\varphi$  отсчитывается вдоль экватора от нулевого меридиана  $PG$ .

Во всех решаемых нами задачах поле излучения обладает достаточно высокой степенью симметрии; по крайней мере, оно всегда цилиндрически симметрично. Это обстоятельство мы учитываем соответствующим выбором контрольной площадки, направляя вектор  $\mathbf{n}$  вдоль оси симметрии. Направление нулевого меридиана можно выбирать произвольно, так как от азимутального угла  $\varphi$  интенсивность не зависит. Поэтому интегрирование по  $\varphi$  в данном случае сводится просто к умножению на  $2\pi$ . В дальнейшем мы будем считать, что система отсчёта выбрана именно таким образом, что интенсивность зависит только от полярного угла  $\theta$ , а при интегрировании по телесному углу справедливо равенство

$$(2.4) \quad \oint I_{\omega} f(\theta) d\Omega = 2\pi \int_0^{\pi} I_{\omega}(\theta) f(\theta) d\theta,$$

позволяющее свести двумерный интеграл к одномерному. Здесь  $f(\theta)$  — любая функция полярного угла.

## Поток

Среди космических объектов встречается много *точечных* источников излучения, то есть, источников, угловые размеры которых значительно меньше разрешающей способности телескопа. К ним относятся практически все звёзды, кроме Солнца. Понятие интенсивности для излучения точечных источников лишено смысла и для них пользуются другой величиной — потоком излучения. Поток является мерой полной энергии, протекающей через единичную площадку, направление которой известно. Разобьём полный телесный угол  $4\pi$  на  $N$  участков малого размера  $\Delta\Omega_i$ :

$$\sum_{i=1}^N \Delta\Omega_i = 4\pi.$$

Теперь измерим энергию  $\Delta E_i$ , проходящую через площадку в направлении  $\Delta\Omega_i$ , и найдём сумму

$$(2.5) \quad \Delta E = \sum_{i=1}^N \Delta E_i.$$

При этом мы учитываем соглашение (2.3) о знаке  $\Delta E_i$ : если энергия «входит» в площадку, то ей приписываем положительный знак, а если «выходит», то отрицательный. В пределе бесконечно большого числа разбиений на бесконечно малые площадки сумма (2.5) превращается в интеграл

$$\Delta E = \oint dE,$$

где обозначение контурного интеграла напоминает, что интегрирование ведётся по всем направлениям с учётом знака  $dE$ . Во время суммирования по углам мы, как и выше, полагали величины  $\Delta S$ ,  $\Delta t$  и  $\Delta\omega$  настолько малыми, что энергия  $\Delta E$  пропорциональна произведению  $\Delta S \Delta t \Delta\omega$ . Как и в случае интенсивности, потоком  $F_{\omega}$  называется предел

$$(2.6) \quad F_{\omega} = \frac{\oint dE}{dS dt d\omega}.$$

Сопоставляя определения (2.2) и (2.6), приходим к выражению потока через интенсивность:

$$(2.7) \quad F_{\omega} = \oint I_{\omega} \cos \theta d\Omega.$$

У точечных источников измеряется именно поток излучения. В случае цилиндрической симметрии, когда справедлива формула

$$(2.8) \quad F_{\omega} = 2\pi \int_0^{2\pi} I_{\omega}(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta.$$

Обычно мы будем пользоваться последней формулой.

Суммирование по угловым переменным в (2.6), на первый взгляд, должно означать, что поток не зависит от направления. Это действительно так, если иметь в виду характеристику поля излучения. Но величина потока зависит от направления площадки. Здесь проявляется различие между интенсивностью и потоком. Если мы изменим направление контрольной площадки, не меняя поля излучения, то интенсивность в любом направлении останется прежней, но поток через площадку станет другим. Поэтому при вычислении потока важно указывать, о какой площадке идёт речь. Далее мы будем иметь в виду обычно принимаемое предположение, что площадка расположена перпенди-

кулярно лучу зрения.

### Средняя интенсивность

Средняя интенсивность  $J_{\omega}$  определяется как делённый на  $4\pi$  интеграл от интенсивности по всем направлениям:

$$(2.9) \quad J_{\omega} = \frac{1}{4\pi} \oint I_{\omega} d\Omega.$$

В случае изотропной ( не зависящей от направления ) интенсивности, когда

$$I_{\omega} = I_0,$$

постоянный множитель  $I_0$  можно вынести за знак интеграла. Учтывая, что телесный угол полной сферы равен  $4\pi$ , получим

$$J_{\omega} = I_0.$$

В (2.9) мы суммируем именно интенсивность, а не прошедшую через площадку энергию с учётом знака. Это свойство отличает среднюю интенсивность от потока. Особенно сильно различие проявляется в только что рассмотренном случае изотропного излучения. Здесь количество «втекающей» и «вытекающей» энергии одинаково в каждом направлении, откуда следует, что полный поток через любую площадку равен нулю.

### Интенсивность и плотность энергии

Средняя интенсивность связана с плотностью энергии излучения. Обозначим посредством  $dU_{\omega}(\Omega)$  плотность энергии квантов, летящих в определённом направлении  $d\Omega$ . За время  $\Delta t$  в телесном угле  $\Delta\Omega$  через площадку  $\Delta S$ , расположенную перпендикулярно рассматриваемому направлению, проходит количество энергии, равное произведению  $dU_{\omega}(\Omega)$  на объём параллелепипеда площадью  $\Delta S$  и высотой  $c \cdot \Delta t$ , ( $c$  — скорость света). Воспользовавшись определением интенсивности (2.2), напишем

$$dU_{\omega}(\Omega) = \frac{1}{c} I_{\omega} d\Omega,$$

откуда получим выражение для полной плотности энергии:

$$(2.10) \quad U_{\omega} = \frac{1}{c} \oint I_{\omega} d\Omega,$$

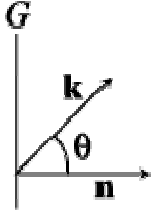
или, согласно (2.9)

$$(2.11) \quad U_{\omega} = \frac{4\pi}{c} J_{\omega}.$$

Итак, плотность энергии излучения однозначно связана со средней интенсивностью.

## Поток от границы изотропного источника

Сформулируем модель границы изотропного источника. Графически она изображена на рис.(3.2.3).



**Рис.3.2.3. Граница изотропного источника**

Аналитически модель определяется следующей зависимостью интенсивности от полярного угла  $\theta$ :

$$(2.12) \quad I_{\omega}(\theta) = \begin{cases} I_0 & \text{если } \theta < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{если } \theta > \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Смысл этого выражения в том, что исходящее от границы излучение изотропно, но отсутствует излучение, входящее в неё извне. Такое поле излучения уже не является изотропным, и поэтому его поток может быть отличен от нуля. С помощью (2.8) получим

$$(2.13) \quad F = \pi I_0.$$

Подчеркнём, что, строго говоря, (2.13) не есть связь между потоком и интенсивностью, так как поток — это число, а интенсивность — функция угла. Равенство числа и функции возможно только в том случае, если функция принимает постоянное значение во всей области определения. Но изотропной интенсивности отвечает поток, равный нулю. Формула (2.13) справедлива только для функции  $I_{\omega}(\theta)$  из (2.12).

## Формула Стефана–Больцмана

Формула Стефана-Больцмана для интегрального по всему спектру потока излучения  $F$  справедлива в рамках сформулированной выше модели границы изотропного источника. Внутри чёрного тела интенсивность  $I$  равна своему среднему по углам значению  $J$ , которое, в свою очередь, с помощью формулы (2.11) выражается через плотность энергии. Воспользовавшись (1.1) и (1.2) окончательно приходим к

$$(2.14) \quad F = \sigma T^4,$$

где

$$\sigma = \frac{c}{4} a = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3} = 5.6686 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{K}^4)$$

есть постоянная Стефана–Больцмана для потока излучения, или просто постоянная Стефана–Больцмана.

## 3.3 Некоторые приложения

Приведём несколько приложений модели чёрного тела к космическим объектам.

## Светимость Солнца

Спектр Солнца близок к планковскому с температурой

$$T_{\odot} \approx 6 \cdot 10^3 \text{ К},$$

а его радиус  $R_{\odot}$  составляет около  $6.96 \cdot 10^{10}$  см. Поэтому светимость Солнца равна

$$L_{\odot} = 4\pi \cdot R_{\odot}^2 \cdot \sigma T_{\odot}^4 \approx 3.826 \cdot 10^{33} \text{ эрг/с}.$$

Она обусловлена, в конечном итоге, переработкой водорода в гелий, причём излучение уносит около 0.8% от энергии покоя в расчёте на один нуклон. На стадии главной последовательности в этом процессе участвует около одной десятой массы звезды. Принимая массу Солнца равной  $2 \cdot 10^{33}$  г, приходим к выводу, что его запас энергии составляет около  $1.4 \cdot 10^{51}$  эрг. Таким образом, Солнцу осталось «жить» на главной последовательности примерно  $10^{10}$  лет.

## Солнечная постоянная

Снова считая Солнце чёрным телом, оценим энергию, приходящую от него на единичную площадку в окрестности Земли. Расстояние  $r$  между Землёй и Солнцем примем равным одной астрономической единице:

$$r = 1 \text{ а.е.} = 1.495979 \cdot 10^{13} \text{ см}.$$

Разделив светимость Солнца на площадь сферы радиуса  $r$ , получим так называемую солнечную постоянную, то есть, поток всего излучения, падающий вне атмосферы Земли на площадку единичной площади при среднем расстоянии Земли от Солнца:

$$f = \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = 1.36 \cdot 10^6 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^2 \text{ с}} = 1.36 \frac{\text{кВт}}{\text{м}^2}.$$

В настоящее время среднестатистическое энергопотребление составляет несколько киловатт на одного жителя нашей планеты. Несколько квадратных метров солнечных батарей, казалось, могли бы обеспечить среднедушевую потребность в энергии. Однако, низкая эффективность батарей (теоретический к.п.д. батарей составляет около 40%, а серийных элементов — 10%), переменчивость погоды, некруглосуточный режим работы, непредсказуемые экологические последствия затенения огромных площадей и выведения их из хозяйственного оборота — всё это делает перспективы солнечной энергетики весьма проблематичными.

## Температура Земли

Оценим температуру Земли, исходя из условия лучистого баланса. Поверхность Земли считаем абсолютно чёрным телом с температурой  $T_{\oplus}$ . Радиус Земли обозначим  $R_{\oplus}$ . На Землю приходит энергия Солнца, равная произведению солнечной постоянной  $f$  на площадь земного диска причём доля этого излучения, равная альбедо  $A$ , отражается обратно в мировое пространство. Среднее значение альбедо Земли  $A$  (альбедо Бонда) равно 0.36. Будем полагать, что, достаточно быстро вращаясь, Земля равномерно прогревается и всю пришедшую на неё энергию переизлучает по закону Стефана-Больцмана. Отсюда следует уравнение баланса:

$$\sigma T_{\odot}^4 \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 \cdot \pi R_{\oplus}^2 \cdot (1 - A) = \sigma T_{\oplus}^4 \cdot 4\pi R_{\oplus}^2,$$

из которого следует формула для температуры Земли:

$$\frac{T_{\oplus}}{T_{\odot}} = \left[ \frac{1 - A}{4} \left( \frac{R_{\odot}}{r} \right)^2 \right]^{1/4}.$$



Радиус Земли выпал из окончательного результата. Таким образом, для определения температуры нагреваемого Солнцем объекта важны не его размеры, а расстояние от Солнца. Подставляя значения известных параметров, получим численную оценку температуры  $T_{\oplus}$ :

$$T_{\oplus} \approx T_{\odot} / 23 \approx 258 \text{ K} = -15^{\circ}\text{C}.$$

В действительности климат Земли значительно более мягкий. Её средняя температура составляет около  $18^{\circ}\text{C}$  за счёт так называемого парникового эффекта — нагрева нижней атмосферы излучением поверхности Земли. Атмосфера поглощает восходящий от поверхности планеты поток длинноволнового излучения, нагревается и, в свою очередь, нагревает поверхность Земли. Как мы установили в разделе (2.7) второй главы, для человеческого глаза максимум в спектре излучения Солнца приходится на длину волны около  $5500\text{\AA}$ . Температура Земли, согласно оценке предыдущего раздела, примерно в 23 раза меньше температуры Солнца, следовательно в её спектре излучения максимум приходится на длину волны примерно 10 мкм. Роль парникового эффекта иллюстрирует рис. 3.3.1. Жёлтым цветом вверху обозначен спектр излучения Солнца в модели чёрного тела, а

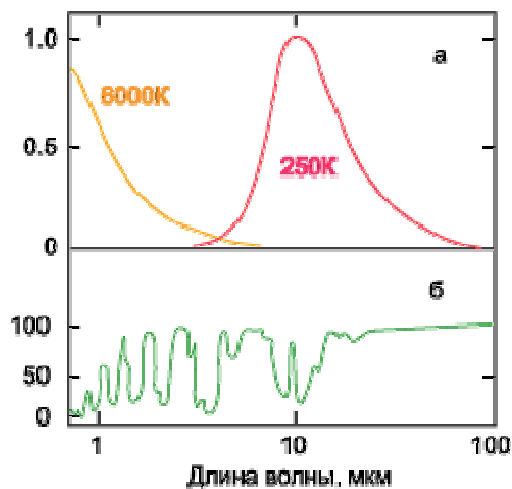


Рис. 3.3.1. а) Спектры черного тела при двух значениях температуры; б) поглощение излучения атмосферой.

красным — излучение Земли. Оба спектра приведены в относительных единицах. Зелёная линия внизу — степень поглощения земной атмосферой излучения на разных длинах волн. Хорошо видно, что солнечный свет проходит сквозь атмосферу практически беспрепятственно. Наоборот, на участке спектра от 10 до 20 мкм находятся полосы поглощения молекул  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{O}_3$ ,  $\text{CH}_4$ . Они-то и поглощают излучение, приходящее с поверхности Земли.

### Эффективная температура звезды

Не только у Солнца спектр излучения близок к функции Планка. Таким свойством обладает большинство звёзд. Поэтому в астрономии принята особая единица измерения интегрального потока — *эффективная температура*  $T_{\text{eff}}$ . Она определяется следующим образом. Если интегральный поток, излучаемый с поверхности звезды, равен  $F_{\text{star}}$ , то

$$(3.1) \quad T_{\text{eff}} = \sqrt[4]{\frac{F_{\text{star}}}{\sigma}}.$$

Физическое содержание этого определения раскрывается его сравнением с формулой (2.14). Эффективная температура — это температура чёрного тела, размеры и светимость которого совпадают с размером и светимостью звезды. Формально (3.1) применимо к любому источнику и является всего лишь мерой потока. Но если источник имеет тепловую природу, то величина  $T_{\text{eff}}$  даёт представление о температуре его поверхности.