

Глава 7. Соотношение неопределенностей

Сформулированный Гейзенбергом принцип неопределённости имеет фундаментальное значение для физики микромира и объясняет многие мнимые парадоксы квантовой теории. Он гласит, что в масштабах атомов теряет смысл представление о движении по определённой траектории. Имеют значение только сохраняющиеся величины, такие как, например, энергия, импульс и момент импульса. В квантовой механике сразу определяются положения энергетических уровней, без предварительного вычисления несуществующей траектории.

Квантовомеханический подход связан со значительным усложнением технической стороны решения. Поэтому при первоначальном знакомстве с тем или иным аспектом атомной физики часто пользуются классическими представлениями и оценками по порядку величины.

7.1. Переход от классической к квантовой механике

Неравенство (6.4.1) шестой главы связывает размер Δx волнового пакета и диапазон Δk волновых чисел тех гармонических колебаний, из которых складывается пакет. Смысл этого неравенства в том, что достаточно точное значение длины волны мы можем получить, только измерив положения нескольких минимумов и максимумов колебаний. Соответственно, теряется точность локализации пакета. В дальнейшем нам понадобится и соотношение (6.4.2) между длительностью пакета Δt и диапазоном частот $\Delta \omega$ составляющих его волн. Умножим обе части (6.4.1) и (6.4.2) на постоянную Планка. Используя далее выражения для импульса и энергии (1.2.1, 1a) фотона, получим

$$(1.1) \quad \Delta p \cdot \Delta x > h,$$

$$(1.2) \quad \Delta E \cdot \Delta t > h.$$

Неравенство типа (1.1) можно записать для каждой из трёх координат:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \Delta p_x \cdot \Delta x &\geq h, \\ \Delta p_y \cdot \Delta y &\geq h, \\ \Delta p_z \cdot \Delta z &\geq h. \end{aligned}$$

Пары «импульс–координата», а также «энергия–время» называют *канонически сопряженными величинами*. Ниже, в двенадцатой главе, мы встретимся с другой парой — проекцией момента импульса на ось и углом поворота вокруг этой оси. Неравенство (1.3) утверждает, что невозможно одновременно определить координату и импульс. А именно, если мы измерим координату с точностью Δx , то при этом неизбежно вносим изменения в проекцию импульса, по крайней мере, $h/\Delta x$.

Следует отметить, что неравенство (1.3) не является точным. В литературе часто приводится формула, аналогичная (1.3), но в её правой части стоит \hbar — постоянная Планка «с чертой». Между двумя этими формами записи нет противоречия: они обе справедливы только по порядку величины и обе годятся для качественных оценок. В следующей главе приводится вывод точной связи

$$(1.4) \quad \sqrt{\langle (\Delta p_x)^2 \rangle \langle (\Delta x)^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}$$

между флуктуациями импульса и координаты. Здесь скобки $\langle A \rangle$ обозначают дисперсию A .

Принцип неопределённости не просто налагает ограничения на возможные результаты измерений. Он имеет более глубокий смысл и вскрывает новые для нас внутренние свойства самого объекта микромира: **электрон не может одновременно иметь определённые значения**

проекций импульса и координаты на одно направление. Это заключение справедливо, конечно, не только для электрона, но и для любой частицы, локализованной в атомных масштабах (порядка ангстрема) и масса которой сравнима с массой атома.

В классическом пределе постоянную Планка можно устремить к нулю. Ошибки в определении канонически сопряжённых параметров при этом становятся сколь угодно малыми — соотношение неопределенностей не накладывает никаких ограничений на точность измерения координаты и импульса. Тем самым определена траектория классической частицы. В квантовой физике мы вынуждены отказаться от понятия траектории и перейти к вероятностному, или статистическому описанию поведения микрочастиц.

7.2. Уширение спектральных линий

Неравенство (1.2) играет важную роль в вопросе о конечной ширине спектральных линий. Оно связывает время жизни атома в возбуждённом состоянии и степень размытости соответствующего энергетического уровня. Хотя внешне оно выглядит идентично (1.1), тем не менее, между ними имеется существенное различие. Первое уравнение означает невозможность **одновременного** существования точных значений импульса и координаты, а второе относится к разбросу значений энергии, измеренных **в разные моменты времени**. Для того, чтобы точно измерить энергию некоторого состояния, измерение должно длиться бесконечно долго. Если характерное время жизни возбуждённого атома равно τ , то неустранимый разброс при определении энергии составляет

$$\Delta E \sim h / \tau,$$

хотя в каждом акте измерения энергия определяется точно. Величина ΔE называется естественной или радиационной шириной линии. Повторяя измерения многократно, мы получим целый энергетический спектр, схематически изображённый на рис.7.2.1. Полученный результат

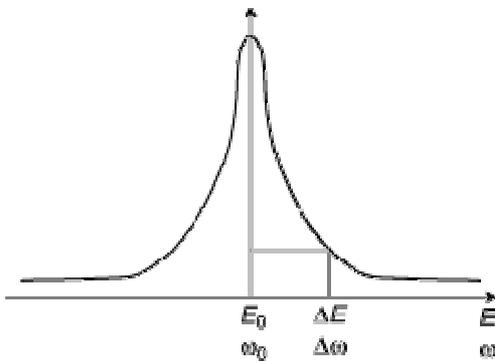


Рис 7.2.1. Радиационное уширение спектральной линии.

надо понимать в статистическом смысле. Например, если возбуждено 1000 атомов, то в 600 случаях мы обнаружим энергию уровня вблизи центра E_0 , в 100 — в диапазоне полуширины $E_0 \pm \Delta E$, а в 50 случаях — вне этого интервала. Можно последовательно возбуждать один и тот же атом. Тогда речь идёт о числе опытов, в которых обнаружено то или иное значение энергии. (В этом случае следует учесть возможность перераспределения по частотам в пределах контура спектральной линии). Такое неизбежное уширение уровня называется «естественным», или радиационным, уширением. Время жизни основного состояния много больше, чем возбуждённых уровней, поэтому его уширением в большинстве случаев можно пренебречь.

7.3. «Волна» и «частица» — предельные случаи реального объекта

Принцип неопределенностей Гейзенберга «примиряет» нас с существованием волновых свойств частиц, с одной стороны, и корпускулярных свойств излучения — с другой. Если мы точно измерили импульс частицы, то и соответствующая ей длина волны де Бройля измерена точно. Но тогда неопределенность координаты бесконечно велика, что характерно для монохроматических волн. И наоборот, если мы точно локализовали объект ($\Delta x \rightarrow 0$), то внесли полную неопределенность в значение импульса ($\Delta p \rightarrow \infty$) и потеряли всякую информацию о длине волны. Отразим в таблице свойства объекта «волна–частица»:

| | | |
|---|--|------------|
| $\Delta p \rightarrow 0$ λ — точно | $\Delta x \rightarrow \infty$ x — не определено | волна |
| $\Delta x \rightarrow 0$ локализация | $\Delta p \rightarrow \infty$ λ — не определено | корпускула |

В классическом пределе можно ввести понятие траектории и предсказать поведение тела с позиции привычного макроскопического детерминизма. Здесь принцип неопределенностей не накладывает никаких реальных ограничений. Рассмотрим конкретный пример: обработку резцом детали, масса M которой равна 100 г и потребуем точность изготовления

$$\Delta x \sim 1 \text{ мкм} = 10^{-4} \text{ см.}$$

Соотношение неопределенностей приводит к разбросу скорости

$$\Delta v \sim \frac{\hbar}{M \cdot \Delta x} \sim 2 \cdot 10^{-17} \text{ см/год.}$$

Ясно, что такая неопределенность никак не повлияет на работу токаря.

Иная ситуация имеет место в микромире, например, для электрона в атоме. Точность его пространственной локализации Δx определяется боровским радиусом $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-8}$ см. Из соотношения неопределенностей получаем оценку

$$\Delta v \sim \frac{h}{m_e \cdot a_0} \sim \frac{h}{m_e} \frac{m_e e^2}{\hbar^2} = \alpha c \sim 10^8 \text{ см/с.}$$

Отсюда следует, что электрон в атоме даже в основном состоянии не может покоиться. Он обязан двигаться со скоростью порядка v_0 — скорости на первой боровской орбите.

7.4 Устойчивость атома

С помощью принципа неопределенностей можно понять причину устойчивости атома и получить оценку его энергии в связанном состоянии.

Рассмотрим задачу о водородоподобном ионе, то есть об ионе, состоящем из ядра и одного электрона. Для химического элемента с номером Z заряд ядра равен Ze . Будем считать, что электрон движется по круговой орбите с постоянной угловой скоростью. Его кинетическая энергия равна

$$(4.1) \quad T = \frac{p^2}{2m_e},$$

а потенциальная энергия в поле ядра составляет

$$(4.2) \quad U = -\frac{Ze^2}{r}.$$

Полная энергия равна сумме $T + U$:

$$(4.3) \quad E = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Введём обозначение Δr для характерного размера области движения электрона и Δp — для среднего значения его импульса. В первом приближении:

$$\Delta r \sim r, \Delta p \sim p.$$

Подставив эти оценки в соотношение неопределённостей, получим:

$$pr \sim \hbar.$$

Отсюда следует приближённая формула для полной энергии как функции r :

$$(4.4) \quad E \sim \frac{\hbar^2}{2m_e r^2} - \frac{Ze^2}{r}.$$

Полная энергия имеет минимум, соответствующий устойчивому состоянию электрона в атоме. Её график приведён на рис.7.4.1. Вдали от ядра полная энергия почти равна потенциальной, она

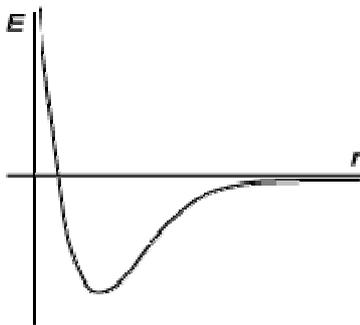


Рис. 7.4.1. Полная энергия электрона в атоме

отрицательна и приближается к горизонтальной оси пропорционально $1/r$. Вблизи центра, наоборот, доминирует кинетическая энергия чисто квантового происхождения. Она положительна и в силу соотношения неопределённостей по мере приближения к ядру (более точная локализация) растёт как $1/r^2$. Тот факт, что атом представляет собой жёсткий объект, противящийся внешнему воздействию, связан именно с принципом неопределенности Гайзенберга: при приближении к ядру растёт импульс электрона. Ищем минимум полной энергии. Для этого дифференцируем (4.4) по радиусу и приравниваем производную нулю:

$$\frac{dE}{dr} \sim -\frac{\hbar^2}{m_e r^3} + \frac{Ze^2}{r^2} = 0.$$

Отсюда получим оценку радиуса водородоподобного иона

$$r_{\min} = \frac{1}{Z} \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{a_0}{Z}.$$

Подставив последнее выражение в (4.4), получим формулу для полной энергии:

$$E = -Z^2 R_y.$$

Конечно, окончательный ответ только случайно получился точным (например, в выкладках мы делали замену $h \rightarrow \hbar$). Нашей целью было показать, как принцип неопределённостей объясняет устойчивость атомных систем.

7.5 Мысленные эксперименты

На этапе становления квантовой теории, в двадцатых и тридцатых годах двадцатого века, было придумано множество так называемых «мысленных экспериментов». Многие из них в силу технических причин, возможно, никогда не будут поставлены. Тем не менее, их авторы пытались путём рассуждений разрешить парадоксы интерпретации квантовомеханических представлений. В последнее время предпринимаются попытки имитации некоторых из них. Рассмотрим один такой мысленный эксперимент — дифракцию электронов на двух щелях. На рис.(7.5.1) поток электронов движется слева направо и попадает на непрозрачную границу, в которой прорезаны две щели.

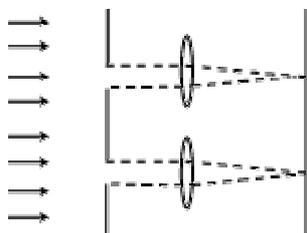


Рис. 7.5.1. Схема мысленного эксперимента по дифракции электронов на двух щелях.

Пройдя щель, они фокусируются специальным устройством и в конце концов регистрируются расположенным справа приёмником. По условию эксперимента, точно заданы все проекции импульса, следовательно, пространственная локализация электронов отсутствует. Проведём последовательно три опыта.

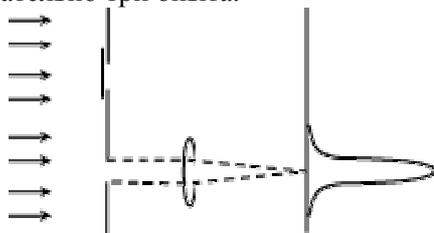


Рис. 7.5.2. Открыта нижняя щель.

Сначала закроем нижнюю щель, оставив открытой верхнюю (рис.7.5.2). Напротив открытой щели образуется плавная картина распределения прошедших через неё электронов. Поменяв местами открытую и закрытую щели (рис.7.5.3), убеждаемся, что «горб» распределения электронов на

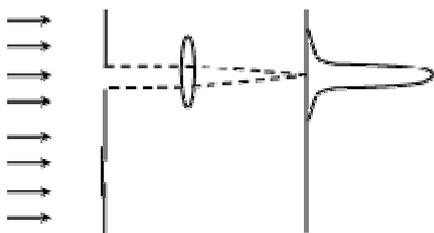


Рис. 7.5.3. Открыта верхняя щель.

приёмнике также перемещается. Если открыты обе щели (рис.7.5.3), то на приёмнике возникает дифракционная картина, на которой выделяются три рядом стоящих максимума (рис.7.5.4). Самый сильный из них расположен центре.

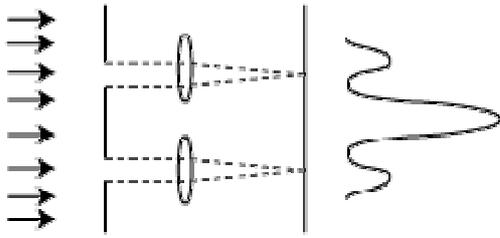


Рис. 7.5.4. Открыты обе щели.

Угловой размер центрального максимума определяется из обычного условия дифракции для дебройлевской длины волны электрона $\lambda_e = h/p_e$, а именно, разность хода двух лучей есть величина порядка λ_e :

$$\Delta x \cdot \sin \varphi \sim \lambda_e = h / p_e.$$

Для малых углов φ имеем

$$(5.1) \quad \Delta x \cdot \varphi \sim h / p_e.$$

Попробуем теперь определить, через какую щель проходит электрон. Для этого поместим между щелями лампочку и будем подсвечивать электроны фотонами с длиной волны λ_ϕ . Линейный размер вспышки будем считать сопоставимым с λ_ϕ . Если мы локализуем вспышку (а, следовательно, и электрон) вблизи одной из щелей

$$(5.2) \quad \lambda_\phi < \Delta x,$$

то дифракционная картина пропадёт. Происходит это потому, что фотон сообщает электрону поперечный импульс порядка импульса самого фотона

$$(5.3) \quad \Delta p_e \sim p_\phi = h / \lambda_\phi,$$

так что при выполнении условия

$$(5.4) \quad \frac{\Delta p_e}{p_e} > \varphi$$

электрон выходит за пределы центрального максимума, что и означает размывание дифракционной картины. Учитывая соотношения (5.1) и (5.3), получаем, что условие (5.4) выполняется, если справедливо (5.2). Таким образом, освещая электрон коротковолновым излучением, мы действительно установим, через какую щель он проходит, но ценой потери дифракционной картины.

Рассмотрим теперь случай, противоположный (5.2):

$$\lambda_\phi > \Delta x.$$

Импульс фотона стал недостаточен для выполнения условия (5.4), и дифракционная картина сохранится. Но теперь мы не будем знать, через какую из щелей прошёл электрон, так как вспышка высвечивает обе щели.

Итак, либо мы определяем путь электрона, разрушая дифракционную картину, либо сохраняем её, но теряем информацию о направлении движения электрона.