Линейная теория роста адиабатических возмущений плотности.

Согласно современным наблюдательным данным, Вселенная в высокой степени однородна и изотропна на масштабах $\geq$ 300 мпк. Этот вывод основан на наблюдаемом распределении галактик, радиогалактик и высокой степени изотропии реликтового излучения $\frac{\Delta T}{T}\Big|_{10^o} \sim 10^{-5}$. Что позволяет использовать в качестве фоновой модели (для исследования эволюции крупномасштабной структуры Вселенной) однородную и изотропную модель Фридмана (Ландау и Лифшиц, 1988), метрика которой в пространственно-плоском случае может быть выписана в виде:

$$ds_F^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\vec{x}^2) \tag{1.1}$$

или в сферических координатах

$$ds_F^2 = dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + r^2 \sin^2\theta d\theta^2 d\phi^2\right), \tag{1.2}$$

где $a(t)$ – масштабный фактор, t и η – соответственно, физическое и комформное время, $(\eta, \vec{x})$ – комформные координаты или сопутствующие координаты Минковского.

Метрика Фридмана взаимно однозначно связана с наблюдаемым законом расширения Вселенной – законом Хаббла: $H = v \cdot R$, где v – лучевая скорость объекта, находящегося на расстоянии R от наблюдателя, H – универсальная постоянная. Этот закон не зависит ни от направления наблюдений, ни от положения наблюдателя.

Динамика Вселенной определяется уравнениями Эйнштейна [1]:

$$G^i_j = 8\pi G T^i_j, \tag{1.3}$$

где T^i_j – тензор энергии-импульса материи, для которого справедлив локальный закон сохранения:

$$T^j_{i,j} = 0, \tag{1.4}$$

где ковариантная производная по координатам обозначена символом а G^i_j – тензор Эйнштейна, образованный из нулевых, первых и вторых производных компонент метрического тензора.

Для случая идеальной жидкости $T^i_j = (\rho+P)u^iu_j - Pg^i_j$, где ρ – плотность материи, P – давление, $u_i = (1/a, 0, 0, 0)$ – невозмущенная 4-скорость материи, и уравнения Эйнштейна принимают вид[2]:

$$3H^2 = \rho, \tag{1.5}$$

- из уравнения $T^o_o = G^o_o$, где $H = \frac{\dot{a}}{a}$ – постоянная Хаббла;

$$\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P)H \tag{1.6}$$

-из уравнения $T^\alpha_\beta = G^\alpha_\beta$).

Уравнения (1.4, 1.5, 1.6) называются уравненями Фридмана.

Из закона сохранения (1.4) следует:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) \tag{1.7}$$

[1]Всюду греческие символы принимают значения 1,2,3; латинские 0,1,2,3 ; $g_{ik} = diag(1, -, -, -)$; подъем и опускание латинских индексов производится с помощью метрического фридмановского тензора, а греческих – с помощью единичной матрицы $\delta_{\alpha\beta}$.

[2]В системе единиц $8\pi G = c = \hbar = 1$

Значение величины $\Omega_{tot} \equiv \frac{\rho}{\rho_c}$, где $\rho_c = 3H_o^2$ определяет свойства глобальной геометрии мира – закрытую ($\Omega_{tot} > 1$), открытую($\Omega_{tot} < 1$), плоскую ($\Omega_{tot} = 1$) глобальную геометрию мира (Ландау и Лифшиц, 1998).

Задавая уравнение состояния $P = P(\rho)$ и решая совместно уравнения (1.5),(1.6), можно получить различные законы динамики масштабного фактора.

Например, для случая $\Omega_{tot} = 1$ и $\Omega_\Lambda = 0$:

- $P = -\rho c^2$ – де-Ситтеровская стадия:

$$a(t) = a_0 e^{Ht}$$

  $H = const$;

- $P = \frac{\rho c^2}{3}$ – радиационно-доминированная (РД) стадия:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

- $P = 0$ – материально-доминированная (МД) стадия:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_3}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Масштабный фактор a, полагаемый в настоящий момент равным 1, связан со значением красного смещения z (определяемым из наблюдений) следующим соотношением: $\frac{a_0}{a(t)} = 1 + z(t)$.

Впервые адиабатические возмущения плотности вещества в однородных и изотропных космологических моделях были исследованны Лифшицем (Лифшиц, 1946), рассмотревшим возмущения метрики как поправку к фридмановской модели, т.е. нашел решения уравнений Энштейна в метрике:

$$ds^2 = ds_F^2 + h_{ij} dx^i dy^j, \tag{1.8}$$

или

$$ds^2 = (g_{ij}^0 + h_{ij}) dx^i dx^j = (1 + h_{00}) dt^2 - a^2(\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta, \tag{1.9}$$

где h_{00} – ньютоновский гравитационный потенциал.

Тензор возмущений метрики может быть разложен по неприводимым представлениям, классификация которых сводится к определению возможных типов волн, в виде которых может быть представлен любой симметричный тензор второго ранга h_{ij}:

$$\frac{1}{2} h_{ij} = Q\delta_{ij} + P_{,ij} + S_{i,j} + G_{ij} \tag{1.10}$$

для которого в координатном пространстве соблюдены следующие условия:

$$S_i^{,i} = 0$$

$$G_i^j \delta_i^j = 0$$

$$G_{i,j}^j = 0$$

Смысл величин функций будет ясен из более подробного рассмотрения данной классификации и условий на функции в фазовом пространстве.

1. С помощью скалярной функции: $Q = e^{i\vec{e}\vec{r}}$ можно составить тензоры

$$Q^i_j = \frac{1}{3}\delta^i_j$$

$$P^i_j = \frac{1}{3}\delta^i_j - \frac{k_j k^i}{e^2}Q.$$

Эти тензоры определены так, что $Q^i_i = 1, P^i_i = 0$. С помощью той же функции Q можно составить вектор $P_i = \frac{k_i}{k}Q$. Таким плоским волнам соответствуют возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывают изменения также и потенциальное поле скоростей и плотность материи, т.е. мы имеем дело с возмущениями, сопровождающимися возникновением сгущений или разрежений материи. Возмущение h_{ij} выражается при этом через тензоры $Q\delta_{ij}$, $P_{,ij}$, возмущение скорости v_i – через вектор $P_{,i}$, а возмущение плотности $\delta\rho$ – через скаляр Q.

2. С помощью поперечной векторной волны:

$$S_i = s_i e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

где вектор s_i определяется условием:

$$s_i k^i = 0,$$

можно составить тензор $S^i_j = \frac{1}{k}(k^i S_j + k_j S^i)$. Соответсвующего же скаляра не существует, поскольку $S_j k^i = 0$. Этим волнам соответствуют возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывает изменение также и поле скоростей, но не плотности материи – это вращательные возмущения. Возмущение h^i_j выражается при этом через тензор $S^i_{,j}$, а возмущение v^i через вектор S^i.

3. Поперечная тензорная волна:

$$G^i_j = \gamma^i_j e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

где тензор γ_{ij} определяется условием:

$$\gamma_{ij} k^j = 0.$$

С ее помощью нельзя составить ни вектора, ни скаляра (поскольку $G^i_j k_i = 0$, $G^i_j k^j_i = 0$) . Этим волнам соответствуют возмущения гравитационного поля, при которых материя остается неподвижной и однородно распределенной в пространстве. Другими словами, это – гравитационные волны в изотропном мире.

Необходимо отметить, что имеет смысл использовать приближение в котором рассматривается только первый и третий тип возмущений, т.к., согласно современным наблюдательным данным, векторные возмущения чрезвычайно малы по амплитуде. И с точки зрения инфляционных теорий, основанных на скалярных полях, векторные возмущения не генерируются в первом порядке теории возмущений (но возможны в теориях инфляции, основанных на векторных полях).

Подставляя в уравнения Эйнштейна компоненты δT_{ij} и δG_{ij}, выраженные через h_{ij}, получим уравнение эволюции h_{ij} для первого типа возмущений (скалярных). В частности, для динамики скалярных возмущений на материально-доминированной стадии, имеем следующее линеаризованное уравнение (Лифшиц, 1946) (для плоской Вселенной с $\Omega_\Lambda = 0$) :

$$\frac{\delta\rho}{\rho_o} = \frac{1}{2\rho a^2}\left(h^{j,i}_{i,j} - h^{,i}_{,i} + \frac{2a^{'}h^{'}}{a}\right),$$

где $'$ означает производную по комформному времени, ρ_0 – современная средняя плотность Вселенной. Для скалярных возмущений $h_{i,j}$ выражается через скалярные функции Q и P в соответствии с (1.10): $\frac{1}{2}h_{ij} = Q\delta_{ij} + P_{,ij}$ а его зависимость от времени определяется "недиагональными"уравнениями Эйнштейна для h_{ij}. Т.е., уравнение динамики возмущений плотности $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho_o}$ выглядит следующим образом:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{1}{2}\rho_o\delta = \delta\frac{\Delta P}{\rho_0 a^2}, \tag{1.11}$$

где $\Delta P = 0$ для изотропной среды.

Поскольку метрика в рассматриваемых небольших областях пространства является локально-минковской, то произвольное возмущение в каждой такой области в линейном приближении может быть разложено по плоским волнам. Понимая под $\vec{r}$ сопутствующий радиус-вектор, можно написать пространственный периодический множитель плоских волн в виде $e^{i\vec{k}\vec{r}}$, где $\vec{k}$ – безразмерный волновой вектор, а $k \equiv \frac{2\pi a}{\lambda}$ – сопутствующее волновое число.

Таким образом, разлагая δ по фурье-компонентам

$$\delta(r,t) = \sum_k \delta_k(t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \tag{1.12}$$

получим дифференциальное уравнение динамики для каждой из гармоник:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_k + \omega^2\delta_k = 0, \tag{1.13}$$

где

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\rho_o - \left(\frac{kv_s}{a}\right)^2, \tag{1.14}$$

а $v_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$ – скорость звука. Необходимо отметить, что уравнение (1.9) требует задания начальных условий для самой переменной и для ее первой производной.

Для барионной материи с ненулевым давлением уравнение (1.14) с нулевой правой частью определяет в теории образования структуры важную величину – джинсовскую длину волны:

$$\left(\frac{kv_s}{a}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho_o \Longrightarrow k = \sqrt{\frac{\rho_o a}{2v_s^2}} \Longrightarrow \lambda_J = \sqrt{\frac{4\pi^2 v_s^2}{\rho_o}}.$$

Волны с длиной волны $\lambda < \lambda_J$ распространяются во Вселенной в виде звуковых колебаний, волны же с длиной волны $\lambda > \lambda_J$ экспоненциально возрастают по-амплитуде со временем, что соответствует возмущениям, коллапсирующим в объекты. Т.е., возмущения с $\lambda > \lambda_J$ растут со временем в соответствии с решением уравнения (1.13); возмущения с $\lambda < \lambda_J$ – это затухающие звуковые волны.

Джинсовской длине волны соответсвует масса:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\lambda_J^3\rho_o.$$

Согласно (Mueller and Seming, 1996), джинсовская масса до момента рекомбинации:

$$M_J \simeq 9\cdot 10^{16}(\Omega_{tot}h^2)^{-2}M_\odot;$$

сразу после рекомбинации:

$$M_J \simeq 1.3 \cdot 10^5 (\Omega_{tot} h^2)^{-0.5} M_{\odot}.$$

Последнее выражение получено в предположении мгновенности рекомбинации.