Описание поля первичных неоднородностей плотности.

Рассмотрим поле контраста плотности $\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta\rho}{\rho}$ как стохастическую суперпозицию различных плоских волн (1.12), предполагая, что амплитуды волн распределены независимо и по нормальному закону для каждой моды:

$$dP(\delta_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(t,R)} e^{-\frac{\delta_k^2}{2\sigma:2(t,R)}} d\delta_k \tag{1.15}$$

где σ^2 – дисперсия распределения контраста плотности. Такие случайные поля называются *гауссовыми*. Фазы волн распределены независимо и равновероятно. Отметим, что гауссов характер поля возмущений плотности предсказывает теория инфляции. Количественными характеристиками случайных полей служат следующие величины:

1. корреляционная функция:

   $$\xi(\mid \vec{r_1} - \vec{r_2} \mid) = \xi(\mid \vec{r} \mid) = \langle \delta(\mid \vec{r_1} \mid) \delta(\mid \vec{r_2} \mid) \rangle,$$

   где усреднение производится по всевозможным состояниям случайного поля, т.е. по фазе в формуле (1.12);

2. спектр мощности:

   $$P(k) = A < |\delta_k(r)|^2 >_r,$$

   где k- волновое число спектра возмущений плотности, которое соотносится с масштабом возмущений как:

   $$\lambda = \frac{2\pi a(t)}{k}$$

   и масштабом масс как:

   $$M = \frac{\pi \rho_m \lambda^3}{6},$$

   где ρ_m - полная плотность материи во Вселенной, а -амплитуда спектра мощности или нормировочная постоянная.

Для случайных *однородных*[1] полей справедлива гипотеза об их эргодичности, т.е. о равенстве среднего по ансамблю среднему по реализациям случайного поля, а, следовательно, и теорема Винера-Хинчина, связывающая корреляционную функцию и спектр мощности (энергетический спектр) случайного поля следующими преобразованиями:

$$\xi(r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(k) e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{k}$$

$$P(k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3\vec{r}$$

[1]Однородными полями называются поля, характеристики которых зависят лишь от разности координат $|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$, а не от положения точек поля

Дисперсию флуктуаций плотности $\sigma^2 \equiv \xi(0) \equiv \left\langle (\frac{\delta\rho}{\rho})^2 \right\rangle_{all\vec{r}}$ можно выразить в терминах спектра мощности

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty P(k) k^2 dk$$

Формула (1.16) описывает дисперсию флуктуаций контраста плотности в *точке* пространства. Но более физично изучать возмущения плотности в каком-то выбранном масштабе, т.е. рассматривать интеграл (1.16) в некотором диапазоне длин волн. По этой причине в описание случайных полей вводят функцию окна $W(k, R)$ – функцию сглаживания случайного поля с масштабом R. Тогда дисперсия флуктуаций плотности в каждый момент времени будет выглядеть следующим образом:

$$\left\langle \left(\frac{\delta\rho}{\rho}\right)^2 \right\rangle_{all\vec{r}} \equiv \left\langle \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 \right\rangle_{all\vec{r}} \equiv \sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}} \int\limits_{\vec{k}} |\delta_k^2||W(k, R)|^2 d^3\vec{k}$$

или

$$\sigma^2(R) = \frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^\infty |W(k, R)|^2 P(k) k^2 dk, \tag{1.16}$$

здесь $P(k) = P_0(k)T^2(k)$, где $P_0(k)$ - начальный спектр возмущений плотности, $T(k)$ - переходная функция, зависящая от природы скрытого вещества и показывающая, как изменяется начальный (пост-инфляционный) спектр возмущений плотности в зависимости от наличия той или иной скрытой массы после попадания длины возмущения под размер горизонта.

Выпишем также важную для анализа величину $\Delta^2(k)$ – безразмерный спектр возмущений плотности:

$$\Delta^2(k) = P(k) k^3. \tag{1.17}$$

Вид W(k,R) зависит от модели распределения плотности в в масштабе R. Для исследования крупномасштабной структуры Вселенной, как правило, используются только два фильтра (Holtsman, 1989):

- Top-hat:

$$W(r, R_T) = \frac{1}{4\pi R_T^3} \quad , \; r \le R_T$$

$$W(r, R_T) = 0 \quad , \; r \ge R_T,$$

  Фурье-представление которой:

$$W(k, R_T) = \frac{3}{(kR_T)^3} [\sin kR_T - kR_T \cos kR_T]$$

  и соответствующий этому окну объем $V_T = \frac{4\pi}{3} R_T^3$. Этот фильтр описывает сферически-симметричные объекты с постоянным профилем плотности.

- Gaussian:

$$W(r, R_G) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_G^3} e^{-\frac{r^2}{2R_G^2}}$$

  Фурье-представление которой:

$$W(k, R_G) = e^{-\frac{k^2 R_G^2}{2}}$$

  и соответствующий этому окну объем $V_G = (2\pi)^{\frac{3}{2}} R_G^3$, причем, $R_T = 5R_G$.

Таким образом, смысл введения функции окна состоит в сглаживании поля неоднородностей, в результате которого происходит разбиение пространства на ячейки размера $\sim R_{T,G}$.

Для построения теоретической модели распределения возмущений плотности материи необходимо задать спектр первичных возмущений плотности (т.е. описать начальные условия в уравнении (1.13)) в виде $P_0 = P_0(k, n, ...)$. Наиболее популярными на сегодняшний момент является класс моделей со степенными спектрами $P_0(k) = Ak^n$, где A –амплитуда спектра, n – его наклон . Этот спектр представляется естественным во многих моделях инфляции в достаточно широком диапазоне волн, исследуемом в космологии. Согласно многим современным данным $n = 1.0 \pm 0.02$.